$$\underset{\sim}{T} = \vec{b}_j \otimes \vec{a}^j. \qquad (2.48)$$

В самом деле, умножая скалярно (2.48) на $\vec{a}_i$ справа, получим в силу (2.26) выражение (2.47). Но тензор, удовлетворяющий условию (2.47) для двух фиксированных троек векторов $\vec{a}_i$ и $\vec{b}_i$, может быть только один. Предполагая противное, для $\underset{\sim}{T}'$ имеем

$$\underset{\sim}{T}' \cdot \vec{a}_i = \vec{b}_i. \qquad (2.49)$$

Следовательно,

$$(\underset{\sim}{T} - \underset{\sim}{T}') \cdot \vec{a}_i = 0. \qquad (2.50)$$

Но тогда тензор $\underset{\sim}{T} - \underset{\sim}{T}'$ при скалярном умножении справа на произвольный вектор $\vec{c}$ даст нулевой вектор, ибо всякий вектор $\vec{c}$ можно единственным образом разложить по векторам $\vec{a}_i$. Поэтому тензор $\underset{\sim}{T} - \underset{\sim}{T}'$ является нулевым, что и требовалось доказать.

Упражнение 2.10. Доказать последнее утверждение, а именно: если при скалярном умножении заданного тензора $\underset{\sim}{T}$ на произвольный вектор $\vec{c}$

$$\underset{\sim}{T} \cdot \vec{c} = 0, \qquad (2.51)$$

то $\underset{\sim}{T} \equiv 0$.

Упражнение 2.11. Провести доказательство теоремы, умножая векторы $\vec{a}_i$ слева на тензор $\underset{\sim}{T}$. ●

§ 3. Инварианты тензора второго ранга

Из соотношения (2.6) следует, что для произведения матриц A и a справедливо соотношение

$$Aa = \mathcal{I} |a|. \qquad (3.1)$$

При этом формулу (2.4) в матричном виде можно представить так:

$$A = \frac{\partial |a|}{\partial a}. \qquad (3.2)$$

Упражнение 3.1. Доказать, что для симметричной матрицы справедливы соотношения

$$\frac{\partial \langle a \rangle}{\partial a} = \mathcal{I}, \qquad (3.3)$$

$$\frac{\partial\langle a^2\rangle}{\partial a}=2a, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial\langle a^3\rangle}{\partial a}=3a^2. \quad \bullet \tag{3.5}$$

Упражнение 3.2. Обобщая предыдущие формулы для n-й степени матрицы a

$$\langle a^n\rangle_i^j \equiv a_i^{i_1} a_{i_1}^{i_2} \ldots a_{i_{n-2}}^{i_{n-1}} a_{i_{n-1}}^j, \tag{3.6}$$

$$\langle a^n\rangle \equiv a_i^{i_1} a_{i_1}^{i_2} \ldots a_{i_{n-2}}^{i_{n-1}} a_{i_{n-1}}^i, \tag{3.7}$$

доказать, что

$$\frac{\partial\langle a^n\rangle}{\partial a}=na^{n-1}. \tag{3.8}$$

Упражнение 3.3. Обобщить формулы (3.3), (3.4), (3.5) и (3.8) на случай несимметричной матрицы a. $\bullet$

Раскрывая формулу (2.2), получим

$$6|a|=\delta_{lmn}^{ijk} a_i^l a_j^m a_k^n=\begin{vmatrix}\delta_l^i & \delta_m^i & \delta_n^i\\ \delta_l^j & \delta_m^j & \delta_n^j\\ \delta_l^k & \delta_m^k & \delta_n^k\end{vmatrix} a_i^l a_j^m a_k^n=$$

$$=\delta_l^i\delta_m^j\delta_n^k a_i^l a_j^m a_k^n+(\delta_n^i\delta_l^j\delta_m^k+\delta_l^k\delta_m^i\delta_n^j)\,a_i^l a_j^m a_k^n-$$

$$-(\delta_n^i\delta_m^j\delta_l^k+\delta_m^i\delta_l^j\delta_n^k+\delta_l^i\delta_n^j\delta_m^k)\,a_i^l a_j^m a_k^n=$$

$$=(a_l^l)^3+2a_n^l a_l^m a_m^n-3a_n^l a_m^m a_l^n, \tag{3.9}$$

отсюда

$$|a|=\frac{1}{6}[\langle a\rangle^3+2\langle a^3\rangle-3\langle a\rangle\langle a^2\rangle]. \tag{3.10}$$

Дифференцируя выражение (3.10) согласно (3.2) и используя соотношения (3.3)—(3.5), получим

$$A=a^2+\frac{1}{2}\langle a\rangle^2\mathcal{I}-\frac{1}{2}\langle a^2\rangle\mathcal{I}-\langle a\rangle a. \tag{3.11}$$

Подставляя (3.11) в формулу (3.1), получим

$$a^3=\langle a\rangle a^2-\frac{1}{2}[\langle a\rangle^2-\langle a^2\rangle]a+|a|\mathcal{I}. \tag{3.12}$$

Выражение (3.12) носит название *формулы Гамильтона — Кели.*

Согласно этой формуле любую степень матрицы выше второй можно выразить через первые две степени матрицы a и единичную $\mathcal{I}$, причем коэффициентами являются полиномиальные функции от следов матриц a, a^2 и a^3. Из этой же формулы следует, что след любой степени $n>3$ матрицы a (3.7) может быть выражен в виде полиномиальной функции через следы матриц a, a^2, a^3. А так как всякий тензор 2-го ранга в каждой точке $\mathcal{R}_3$ имеет компонентами матрицу второго порядка, то *всякий симметричный тензор второго ранга S имеет три независимых алгебраических инварианта* *. В качестве этих инвариантов можно выбрать величины

$$\langle s\rangle,\ \langle s^2\rangle,\ \langle s^3\rangle \text{ или } \langle s\rangle,\ \langle s^2\rangle,\ |s| \tag{3.13}$$

и т. д., где под s будем понимать матрицы, образующие, вообще говоря, смешанные компоненты тензора

$$\underset{\sim}{S}=s_i{}^j\vec{e}^i\otimes\vec{e}_j, \tag{3.14}$$

т. е.

$$\langle s\rangle=s_i{}^i=g_{ij}s^{ij}=g^{ij}s_{ij};$$
$$\langle s^2\rangle=s_j{}^is_i{}^j=g^{lj}g^{kl}s_{il}s_{kj}=s_{ij}s^{ji}=g_{il}g_{kj}s^{lj}s^{kl};$$
$$\langle s^3\rangle=s_j{}^is_k{}^js_i{}^k=g^{lj}g^{kl}g^{mn}s_{il}s_{kn}s_{mj}=$$
$$=g_{il}g_{kn}g_{mj}s^{ij}s^{kl}s^{mn};$$

$$6|s|=\epsilon^{ijk}_{lmn}\,s^l_i\,s^m_j\,s^n_k=g\,\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{lmn}\,s^{il}\,s^{jm}\,s^{kn}=$$
$$=\frac{1}{g}\,\epsilon^{ijk}\,\epsilon^{lmn}\,s_{il}\,s_{jm}\,s_{kn}. \tag{3.15}$$

Под следами $\langle\underset{\sim}{S}\rangle$, $\langle\underset{\sim}{S}^2\rangle$, $\langle\underset{\sim}{S}^3\rangle$ понимаем следы соответствующих матриц (3.15), вычисленные в каждой точке M пространства $\mathcal{R}_3$. При этом из соотношений (1.4) видно, что

$$s_i{}^j=s^{kj}g_{ik}=s_{ik}g^{kj}. \tag{3.16}$$

Пусть с помощью тензора $\underset{\rightleftarrows}{T}$ задается преобразование, т. е. каждому вектору $\vec{a}\in\mathcal{R}_3$ ставится в соответствие некоторый вектор $\vec{b}\in\mathcal{R}_3$:

---

* Вопрос о функционально независимых инвариантах будет рассмотрен в § 3 гл. 4.

$$\vec{b} = \underset{\sim}{T} \cdot \vec{a} \tag{3.17}$$

или, разлагая векторы и тензор по базису $\vec{e}_i$,

$$b^i \vec{e}_i = t^i{}_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j \cdot a^k \vec{e}_k; \quad \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \delta_k{}^j. \tag{3.18}$$

Следовательно,

$$b^i e_i = t^i{}_j a^j \vec{e}_i, \tag{3.19}$$

или

$$b^i = t^i{}_j a^j. \tag{3.20}$$

Преобразование (3.20) задается в каждой точке M пространства $\mathscr{R}_3$.

Отыщем теперь такой вектор $\vec{a}$, который после преобразования (3.17) в некоторой точке M остается коллинеарным самому себе, т. е. не поворачивается:

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}; \qquad b^i = \lambda a^i. \tag{3.21}$$

Такой вектор называется *собственным вектором тензора* $\underset{\sim}{T}$, направление собственного вектора — главной осью тензора $\underset{\sim}{T}$ в точке M, а число λ называется *собственным значением* $\underset{\sim}{T}$ в точке M. Согласно (3.20) и (3.21) имеем

$$(\lambda \delta^i{}_j - t^i{}_j) a^j = 0. \tag{3.22}$$

Для нахождения собственных значений нужно решить систему алгебраических уравнений (3.22) относительно компонент вектора $\vec{a}$. Эта система однородная. Следовательно, определитель этой системы нужно приравнять нулю. В матричной записи имеем

$$P(\lambda) \equiv |\lambda \mathscr{I} - t| = 0, \tag{3.23}$$

где $P(\lambda)$ — *характеристический полином*. Найдем его корни. Для этого воспользуемся формулой (2.7)

$$P(\lambda) \equiv |\lambda \mathscr{I} - t| \equiv \lambda^3 - \lambda^2 \langle t \rangle + \lambda \langle T \rangle - |t| = 0, \tag{3.24}$$

где T — алгебраическое дополнение матрицы t.

Заметим, что характеристический полином не изменяется при любом преобразовании подобия Q (см. § 6 гл. 1). В самом деле, пусть

$$t' = QtQ^{-1}, \tag{3.25}$$

тогда

$$|\lambda\mathscr{I}-t'|=|Q(\lambda\mathscr{I}-t)Q^{-1}|=$$
$$=|Q|\,|\lambda\mathscr{I}-t|\,|Q|^{-1}=|\lambda\mathscr{I}-t|. \qquad (3.26)$$

Таким образом, характеристический полином инвариантен по отношению ко всем преобразованиям подобия. Поэтому всякий тензор $\underset{\sim}{T}$ имеет три независимых инварианта

$$\langle t\rangle,\ \langle T\rangle,\ |t|. \qquad (3.27)$$

Согласно основной теореме алгебры уравнение (3.24), как и всякое кубическое, имеет три корня. Эти корни и являются собственными значениями тензора $\underset{\sim}{T}$ в точке M. Если тензор $\underset{\sim}{T}$ симметричный, то корни являются действительными. В самом деле, обозначим через $\vec{a}^*$ вектор, комплексно сопряженный к вектору $\vec{a}$ (т. е. компоненты образуются из a_i комплексным сопряжением). Умножим равенство (3.22) на a_i^* и просуммируем по i. Получим

$$\lambda a^i a_i^*=t_j{}^i a^j a_i^*. \qquad (3.28)$$

Производя теперь операцию комплексного сопряжения над левой и правой частью (3.28) и учитывая симметрию тензора $\underset{\sim}{T}$, получим

$$\lambda^* a^{i*} a_i=t_j{}^i a_i^* a^j; \qquad (3.29)$$

из сравнения (3.28) и (3.29) вытекает, что

$$\lambda=\lambda^*. \qquad (3.30)$$

Далее, предположим, что λ_1 — собственное значение, соответствующее собственному вектору $\vec{a}_{(1)}$, а λ_2 — собственное значение, соответствующее собственному вектору $\vec{a}_{(2)}$. Тогда

$$t_j{}^i a^j{}_{(1)}=\lambda_1 a^i{}_{(1)};\quad t_j{}^i a^j{}_{(2)}=\lambda_2 a^i{}_{(2)}. \qquad (3.31)$$

Умножим первое равенство (3.31) на $a_{(2)i}$, а второе равенство (3.31) — на $a_{(1)i}$, просуммируем по i и вычтем одно равенство из другого. Тогда получим

$$(\lambda_1-\lambda_2)\,a^i{}_{(1)}a_{(2)i}=0. \qquad (3.32)$$

Отсюда следует, что при $\lambda_1\neq\lambda_2$

$$g_{ij}a^i{}_{(1)}a^j{}_{(2)}=0, \qquad (3.33)$$

т. е. собственные векторы симметричного тензора $\underset{\sim}{T}$, соответствующие различным собственным значениям, взаимно ортогональны. Поэтому если все собственные значения симметричного тензора $\underset{\sim}{T}$ различны, то он имеет три взаимно ортогональных собственных вектора, которые можно считать единичными (определены с точностью до константы). Эти три вектора могут быть выбраны в качестве локального репера в точке M. Если система координат в $\mathcal{R}_3$ ортогональна, то три собственных вектора тензора $\underset{\sim}{T}$ могут служить базисными векторами для всего пространства $\mathcal{R}_3$, а матрица $t_j{}^i$, выражающая тензор в этой системе координат, будет диагональной. В случае общей криволинейной системы координат матрица $t_j{}^i$ является диагональной, вообще говоря, только в точке M.

§ 4. Поверхность Коши

Со всяким симметричным тензором второго ранга $\underset{\sim}{T}$ в каждой точке M можно связать центральную поверхность 2-го порядка. Рассмотрим в точке M квадратичную форму

$$2f \equiv t_{ij}x^i x^j. \tag{4.1}$$

Очевидно, что поверхность

$$f = \text{const} \tag{4.2}$$

является либо эллипсоидом, либо гиперболоидом (или их вырождением). Поверхность f (4.2) называется *тензорной поверхностью* тензора $\underset{\sim}{T}$ или его поверхностью Коши в точке M. Из (4.1) следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = t_{ij}x^j \equiv y_i, \tag{4.3}$$

или

$$\vec{y} = \operatorname{grad} f. \tag{4.4}$$

Таким образом поверхность (4.2), соответствующая квадратичной форме (4.1), связанной с тензором $\underset{\sim}{S}$, допускает следующее геометрическое толкование. Всякому вектору

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i \tag{4.5}$$

поверхность Коши ставит в соответствие вектор $\vec{y} \in \mathcal{R}_3$

$$\vec{y} = \vec{y}_i e^i, \tag{4.6}$$

причем для него справедливо выражение (4.4).