ниям, взаимно ортогональны. Поэтому если все собственные значения симметричного тензора $\underset{\sim}{T}$ различны, то он имеет три взаимно ортогональных собственных вектора, которые можно считать единичными (определены с точностью до константы). Эти три вектора могут быть выбраны в качестве локального репера в точке M. Если система координат в $\mathcal{R}_3$ ортогональна, то три собственных вектора тензора $\underset{\sim}{T}$ могут служить базисными векторами для всего пространства $\mathcal{R}_3$, а матрица $t_j{}^i$, выражающая тензор в этой системе координат, будет диагональной. В случае общей криволинейной системы координат матрица $t_j{}^i$ является диагональной, вообще говоря, только в точке M.

§ 4. Поверхность Коши

Со всяким симметричным тензором второго ранга $\underset{\sim}{T}$ в каждой точке M можно связать центральную поверхность 2-го порядка. Рассмотрим в точке M квадратичную форму

$$2f \equiv t_{ij}x^i x^j. \tag{4.1}$$

Очевидно, что поверхность

$$f = \text{const} \tag{4.2}$$

является либо эллипсоидом, либо гиперболоидом (или их вырождением). Поверхность f (4.2) называется *тензорной поверхностью* тензора $\underset{\sim}{T}$ или его поверхностью Коши в точке M. Из (4.1) следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = t_{ij}x^j \equiv y_i, \tag{4.3}$$

или

$$\vec{y} = \operatorname{grad} f. \tag{4.4}$$

Таким образом поверхность (4.2), соответствующая квадратичной форме (4.1), связанной с тензором $\underset{\sim}{S}$, допускает следующее геометрическое толкование. Всякому вектору

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i \tag{4.5}$$

поверхность Коши ставит в соответствие вектор $\vec{y} \in \mathcal{R}_3$

$$\vec{y} = \vec{y}_i e^i, \tag{4.6}$$

причем для него справедливо выражение (4.4).

Пусть, например, поверхность Коши тензора $\underset{\sim}{T}$ является эллипсоидом (рис. 9). Очевидно, что если три полуоси этого эллипсоида имеют различные значения, то существуют только три взаимно перпендикулярных направления, по которым вектор $\vec{x}$ коллинеарен вектору $\vec{y}$. Эти направления и называются *главными направлениями* тензора $\underset{\sim}{T}$ в точке M.

Пусть теперь $\underset{\sim}{T}$ — произвольный симметричный тензор в $\mathscr{R}_3$. Рассмотрим соответствующую ему в точке

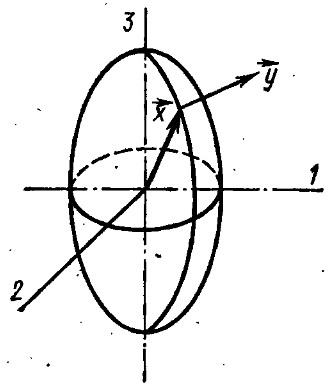

Рис. 9

M квадратичную форму (4.1). Найдем экстремальные значения функции f на единичных векторах $\vec{x}$, т. е. при дополнительных условиях

$$g_{ij}x^i x^j = 1. \tag{4.7}$$

Для решения поставленной задачи на условный экстремум воспользуемся методом Лагранжа, т. е. разыщем экстремум функции

$$F = 2f - \lambda(g_{ij}x^i x^j - 1). \tag{4.8}$$

Для этого приравняем нулю частные производные этой функции

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} \equiv 2(t_{ij} - \lambda g_{ij})\, x^j = 0. \tag{4.9}$$

Умножая левую часть (4.9) на g^{kl} и суммируя по l, получим систему (3.22), а значит, для определения экстремальных значений тензора $\underset{\sim}{T}$ в точке M нужно решить характеристическое уравнение (3.24), т. е. экстремальными значениями тензора $\underset{\sim}{T}$ являются его главные значения.

В главных осях уравнение (4.2), таким образом, имеет вид

$$\lambda_1 (x^1)^2 + \lambda_2 (x^2)^2 + \lambda_3 (x^3)^2 = \text{const}. \tag{4.10}$$

Если все $\lambda_i > 0$, то поверхность Коши является эллипсоидом.

Итак, всякий симметричный тензор 2-го порядка $\underset{\sim}{T}$ порождает в каждой точке M преобразование, переводящее всякую сферу в поверхность 2-го порядка.

Поверхностью Коши для единичного тензора является сфера. Поэтому тензор

$$\underset{\sim}{P} = p\underset{\sim}{\mathcal{J}} = p g_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j = p \delta_j^i \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j = p g^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, \tag{4.11}$$

где p — некоторый скаляр, называется *шаровым тензором.*

Девиатором $\underset{\sim}{D}$ называется симметричный тензор 2-го ранга, след которого равен нулю, т. е.

$$\langle \underset{\sim}{D} \rangle \equiv d_i^{\,i} \equiv d_{ij} g^{ij} \equiv d^{ij} g_{ij} = 0. \tag{4.12}$$

Девиатором симметричного тензора $\underset{\sim}{T}$ называется тензор $\underset{\sim}{\overline{T}}$

$$\underset{\sim}{\overline{T}} = \underset{\sim}{T} - \frac{1}{3} \langle \underset{\sim}{T} \rangle \underset{\sim}{\mathcal{J}}, \tag{4.13}$$

или для компонент тензора $\underset{\sim}{\overline{T}}$

$$\begin{gathered} \bar{t}_{ij} = t_{ij} - \frac{1}{3} \langle \underset{\sim}{T} \rangle g_{ij}, \\ \bar{t}^{ij} = t^{ij} - \frac{1}{3} \langle \underset{\sim}{T} \rangle g^{ij}, \\ \bar{t}^i_j = t^i_j - \frac{1}{3} \langle \underset{\sim}{T} \rangle \delta^i_j, \end{gathered} \tag{4.14}$$

где след $\langle \underset{\sim}{T} \rangle$ тензора $\underset{\sim}{T}$ определяется формулами (3.15) или (4.12).

Упражнение 4.1. Доказать, что всякий симметричный тензор 2-го ранга можно разложить на сумму шарового и девиатора.

Упражнение 4.2. Доказать, что у девиатора $\overline{\underset{\sim}{T}}$ тензора $\underset{\sim}{T}$ имеется только два независимых инварианта. ●

Инвариант $\sqrt{\langle\overline{\underset{\sim}{T}}^2\rangle}$ называется *интенсивностью тензора* $\underset{\sim}{T}$ и обозначается $t_и$:

$$t_и^2 \equiv \langle\overline{\underset{\sim}{T}}^2\rangle \equiv \overline{T}_{ij}\overline{T}^{ji} \equiv \overline{T}^i_j\overline{T}^j_i \equiv g_{il}g_{kj}\overline{T}^{ij}\overline{T}^{kl}; \qquad (4.15)$$

направляющим тензором $\underset{\sim}{T}$ называется тензор $\underset{\sim}{\tilde{T}}$

$$\underset{\sim}{\tilde{T}} = \overline{\underset{\sim}{T}}/t_и. \qquad (4.16)$$

Так как

$$\langle\underset{\sim}{\tilde{T}}\rangle = 0;\ \langle\underset{\sim}{\tilde{T}}^2\rangle = 1, \qquad (4.17)$$

то направляющий тензор $\underset{\sim}{\tilde{T}}$ тензора $\underset{\sim}{T}$ имеет только один независимый инвариант, т. е. определяется в каждой точке M тремя углами Эйлера, характеризующими положение главных осей тензора $\underset{\sim}{T}$, и, например, инвариантом $|\underset{\sim}{\tilde{T}}|$.

Упражнение 4.3. Доказать, что

$$\langle\underset{\sim}{T}\rangle^2 \leqslant 3\langle\underset{\sim}{T}^2\rangle, \qquad (4.18)$$

т. е.

$$|T^i_i| \leqslant \sqrt{3}\,(t^{ij}t_{ij})^{1/2}. \qquad (4.19)$$

Упражнение 4.4. Доказать, что

$$|\langle\overline{\underset{\sim}{T}}^3\rangle| \leqslant \frac{1}{\sqrt{6}}\,t_и^3, \qquad (4.20)$$

т. е.

$$|\bar{t}^i_k\bar{t}^k_j\bar{t}^j_i| \leqslant \frac{1}{\sqrt{6}}\,(\bar{t}^{ij}\bar{t}_{ji})^{3/2}. \qquad (4.21)$$

Упражнение 4.5. Доказать, что для девиатора и направляющего тензора $\underset{\sim}{T}$ поверхностью Коши является гиперболоид.

Упражнение 4.6. Доказать, что преобразование (4.3), ставящее в соответствие каждому вектору $\vec{x}$ вектор $\vec{y}$, можно записать в виде

$$\vec{y}=\underset{\sim}{T}\cdot\vec{x};\quad \vec{y}=t_{ij}x^j\vec{e}^i. \quad \bullet \tag{4.22}$$

Очевидно, что величина

$$N\equiv\vec{y}\cdot\vec{x}=\vec{x}\cdot\underset{\sim}{T}\cdot\vec{x}=2f \tag{4.23}$$

при условии (4.7), т. е.

$$\vec{x}\cdot\vec{x}=1, \tag{4.24}$$

является инвариантом тензора $\underset{\sim}{T}$, зависящим от направления $\vec{x}$. Величина N имеет экстремальные значения, соответствующие экстремальным направлениям $\vec{x}$.

В механике сплошной среды часто бывает нужным представить вектор $\vec{y}$ в виде суммы двух составляющих: вектора $\vec{n}$, коллинеарного единичному вектору $\vec{x}$,

$$\vec{n}=N\vec{x}, \tag{4.25}$$

и вектора $\vec{\tau}$, ортогонального вектору $\vec{n}$,

$$\vec{y}=\vec{n}+\vec{\tau}. \tag{4.26}$$

Из (4.22) и (4.23) следует, что

$$\tau^2=y_iy_jg^{ij}-(t_{ij}x^ix^j)^2=t_{ik}t_{jl}(g^{ij}-x^ix^j)x^kx^l. \tag{4.27}$$

Положим, что $\vec{z}$ — единичный вектор, причем

$$\vec{\tau}=\Gamma\vec{z};\quad \vec{z}\cdot\vec{z}=1. \tag{4.28}$$

Тогда из (4.26) следует, что

$$\Gamma\vec{z}=\vec{y}-N\vec{x}. \tag{4.29}$$

Умножая (4.29) скалярно на вектор $\vec{e}_i$, получим

$$z_i=\frac{y_i-Nx_i}{\Gamma}=\frac{1}{\Gamma}(t_{ij}-t_{kj}x^kx_i)x^j. \tag{4.30}$$

Упражнение 4.7. Доказать, что формулы (4.27) и (4.30) могут быть записаны только через девиатор тензора $\underset{\sim}{T}$ или через направляющий тензор $\underset{\sim}{\bar{T}}$:

$$\frac{\Gamma^2}{t_{\text{и}}^2}=\tilde{t}_{ik}\tilde{t}_{jl}(g^{ij}-x^ix^j)x^kx^l, \tag{4.31}$$

$$\frac{\Gamma}{t_{\text{н}}} z_i = (\tilde{t}_{ij} - \tilde{t}_{kj} x^k x_i)\, x^j. \quad \bullet \tag{4.32}$$

При заданном тензоре $\underset{\sim}{T}$ формула (4.27) или (4.31) позволяет построить так называемую поверхность Колосова, определяющую изменение величины Г, т. е. модуля вектора $\vec{\tau}$ в зависимости от направления вектора $\vec{x}$. Предположим, что в точке M выбран единичный репер $\vec{k}_i$, векторы которого коллинеарны главным направлениям тензора $\underset{\sim}{T}$. Введем полярные координаты: $r = \frac{\Gamma}{t_{\text{н}}}$ — радиус (направлен по вектору $\vec{x}$) и углы θ и φ (рис. 10). Тогда компоненты единичного вектора $\vec{x}$ имеют координаты в базисе $\vec{k}_i$:

$$x_1 = \sin\theta\cos\varphi,\ x_2 = \sin\theta\sin\varphi,\ x_3 = \cos\theta, \tag{4.33}$$

направляющий тензор $\underset{\sim}{T}$ в главной системе координат выражается диагональной матрицей. Обозначим его компоненты (т. е. главные значения) через $\tilde{t}_1$, $\tilde{t}_2$,

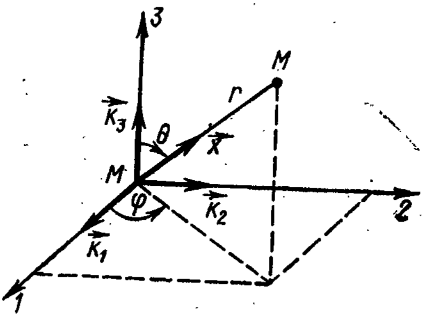

Рис. 10

$\tilde{t}_3$. Тогда согласно (4.17) имеем

$$\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2 + \tilde{t}_3 = 0;\ \tilde{t}_1^2 + \tilde{t}_2^2 + \tilde{t}_3^2 = 1. \tag{4.34}$$

Упражнение 4.8. Доказать, что экстремальные значения величины Г

$$\Gamma^2 = \tilde{t}_{ik}\tilde{t}_{jl}(g^{ij} - x^i x^j)\, x^k x^l \tag{4.35}$$

находятся в направлениях вектора $\vec{x}$:

$$x^1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}};\ x^2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}};\ x^3 = 0;$$

$$x^1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}};\ x^2 = 0;\ x^3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \tag{4.36}$$

$$x^1 = 0;\ x^2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}};\ x^3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Упражнение 4.9. Доказать, что компоненты $\bar{t}_{ij}$ тензора $\underset{\sim}{\bar{T}}$ в ортогональной системе координат, определяемой одним из направлений (4.36) вектора $\vec{x}$ $\left(\text{например, } \vec{x}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}\right)$, вектором $\vec{k}_3$ и вектором $\vec{x}\times\vec{k}_3$, имеют экстремальные значения и связаны с главными значениями тензора $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ и $\bar{t}_3$ соотношениями

$$\bar{t}_{12} = \frac{\bar{t}_1 - \bar{t}_2}{2}. \tag{4.37}$$

Упражнение 4.10. Значение величины Г в направлении вектора $\vec{x}$

$$\vec{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}_1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}_2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}_3 \tag{4.38}$$

называется Г-октаэдрическим и обозначается $\Gamma_и$. Доказать, что

$$\Gamma_и = \frac{1}{\sqrt{3}}t_и = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\bar{t}_1^2 + \bar{t}_2^2 + \bar{t}_3^2}. \ \bullet \tag{4.39}$$

Условиям (4.34) можно удовлетворить, полагая

$$\tilde{t}_1 = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2+\sin 2\alpha}};\ \tilde{t}_2 = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2+\sin 2\alpha}};$$

$$\tilde{t}_3 = -\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\sqrt{2+\sin 2\alpha}}, \tag{4.40}$$

где угол α является единственным параметром, полностью определяющим направляющий тензор $\underset{\sim}{T}$ в главных осях.

Уравнение поверхности Колосова принимает вид

$$r^2 = \tilde{t}_i^2 x_i^2 - (\tilde{t}_i x_i^2)^2. \tag{4.41}$$

Упражнение 4.11. Доказать, что начало координат M принадлежит поверхности Колосова.

Упражнение 4.12. Доказать, что величина Γ имеет экстремальные значения при следующих r:

$$r_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+4\sin 2\alpha+3\cos 2\alpha}{2(2+\sin 2\alpha)}};\quad \theta=\frac{\pi}{4};\quad \varphi=0;\ \pi;$$

$$r_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+4\sin 2\alpha-3\cos 2\alpha}{2(2+\sin 2\alpha)}};\quad \theta=\frac{\pi}{4};$$

$$\varphi=\frac{\pi}{2};\ \frac{3}{2}\pi; \tag{4.42}$$

$$r_3=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}};\quad \theta=\frac{\pi}{2};\quad \varphi=\frac{\pi}{4};\ \frac{3}{4}\pi.$$

Упражнение 4.13. Доказать, что при

$$\theta=\frac{\pi}{4};\quad \varphi=\pm\frac{\pi}{4};\quad \varphi=\pm\frac{3}{4}\pi;$$

$$\Gamma=\Gamma_{\text{н}};\quad r=r_{\text{н}}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7+3\sin 2\alpha}{2+\sin 2\alpha}}. \tag{4.43}$$

Упражнение 4.14. Пусть r_* — максимальные значения из величин r_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ (4.42). Доказать, что

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}\geqslant\frac{r_{\text{н}}}{r_*}\geqslant\sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{4.44}$$

Упражнение 4.15. Доказать, что плоскости

$$\theta=0;\quad \theta=\frac{\pi}{2},\quad \varphi=0;\quad \theta=\frac{\pi}{2},\quad \varphi=\frac{\pi}{2}$$

являются плоскостями симметрии поверхности Колосова. ●

В теоретической механике часто пользуются понятием *тензора моментов инерции* $\underset{\sim}{J}$. Этот симметричный тензор 2-го ранга определяется следующим образом (см. предисловие):

$$J_{ij}=\Sigma m(x^k x_k g_{ij}-x_i x_j). \tag{4.45}$$

Здесь x^k — координаты радиус-вектора $\vec{x}=x^k\vec{e}_k$ некоторой материальной точки, m — масса этой материальной точки. Суммирование происходит по всем таким материальным точкам, причем индекс суммирования опущен.

Шаровая часть этого тензора $\underset{\sim}{J}$

$$J_0 \equiv \frac{1}{2} J_{ij} g^{ij} = \Sigma m x^k x_k \tag{4.46}$$

называется полярным моментом инерции, а диагональные члены в прямоугольной декартовой системе координат — осевыми моментами инерции. Например,

$$J_{11} = \Sigma m[(x_2)^2 + (x_3)^2] \tag{4.47}$$

— осевой момент инерции относительно оси x_1.

Упражнение 4.16. Образовать девиатор тензора момента инерции

$$\overline{J}_{ij} = J_{ij} - \frac{2}{3} J_0 g_{ij} \tag{4.48}$$

и записать его выражения в случае прямоугольной декартовой системы координат. ●

В этом случае его диагональные члены называются моментом инерции относительно соответствующей плоскости, а недиагональные (общие для полного тензора и его девиатора) — центробежными моментами инерции.

§ 5. Тензоры третьего ранга

В этом параграфе рассмотрим представление некоторых тензоров, наиболее часто встречающихся в приложениях. Это представление будет напоминать представление тензора второго ранга, которое было дано в виде суммы антисимметричного тензора (псевдовектора), шарового тензора (скаляра) и девиатора.

Рассмотрим тензор третьего ранга

$$\underset{\sim}{a} = a_{ijk} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \otimes \vec{e}^k. \tag{5.1}$$

Очевидно, его уже нельзя, как тензор второго ранга, представить в виде суммы антисимметричного и симметричного тензоров. Поэтому выделим из него составляющую, антисимметричную по всем трем индексам, и составляющую, симметричную по всем трем индексам. Оставшуюся часть обозначим через