риальной точки. Суммирование происходит по всем таким материальным точкам, причем индекс суммирования опущен.

Шаровая часть этого тензора $\underset{\sim}{J}$

$$J_0 \equiv \frac{1}{2} J_{ij}g^{ij} = \Sigma m x^k x_k \tag{4.46}$$

называется полярным моментом инерции, а диагональные члены в прямоугольной декартовой системе координат — осевыми моментами инерции. Например,

$$J_{11} = \Sigma m[(x_2)^2 + (x_3)^2] \tag{4.47}$$

— осевой момент инерции относительно оси $x_1$.

**Упражнение 4.16.** Образовать девиатор тензора момента инерции

$$\overline{J}_{ij} = J_{ij} - \frac{2}{3} J_0 g_{ij} \tag{4.48}$$

и записать его выражения в случае прямоугольной декартовой системы координат. ●

В этом случае его диагональные члены называются моментом инерции относительно соответствующей плоскости, а недиагональные (общие для полного тензора и его девиатора) — центробежными моментами инерции.

## § 5. Тензоры третьего ранга

В этом параграфе рассмотрим представление некоторых тензоров, наиболее часто встречающихся в приложениях. Это представление будет напоминать представление тензора второго ранга, которое было дано в виде суммы антисимметричного тензора (псевдовектора), шарового тензора (скаляра) и девиатора.

Рассмотрим тензор третьего ранга

$$\underset{\sim}{a} = a_{ijk}\vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \otimes \vec{e}^k. \tag{5.1}$$

Очевидно, его уже нельзя, как тензор второго ранга, представить в виде суммы антисимметричного и симметричного тензоров. Поэтому выделим из него составляющую, антисимметричную по всем трем индексам, и составляющую, симметричную по всем трем индексам. Оставшуюся часть обозначим через

$$\underset{\sim}{b}=b_{ijk}\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j\otimes\vec{e}^k, \tag{5.2}$$

тогда

$$a_{ijk}=\overset{1}{a}_{ijk}+\overset{2}{a}_{ijk}+b_{ijk},$$

$$\overset{1}{a}_{ijk}\equiv a_{[ijk]};\quad \overset{2}{a}_{ijk}\equiv a_{(ijk)}. \tag{5.3}$$

Легко подсчитать, что первое слагаемое в правой части (5.3) содержит всего одну независимую компоненту, причем

$$\underset{\sim}{\overset{1}{a}}=a_{[ijk]}\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j\otimes\vec{e}^k=a_{ijk}\vec{e}^i\wedge\vec{e}^j\wedge\vec{e}^k,$$

$$\overset{1}{a}_{123}=\frac{1}{6\sqrt{g}}\,e^{ijk}a_{ijk}, \tag{5.4}$$

т. е. тензору $\underset{\sim}{\overset{1}{a}}$ ставится в соответствие псевдоскаляр. Второе слагаемое содержит десять независимых компонент: $\overset{2}{a}_{111}$, $\overset{2}{a}_{222}$, $\overset{2}{a}_{333}$, $\overset{2}{a}_{122}$, $\overset{2}{a}_{133}$, $\overset{2}{a}_{211}$, $\overset{2}{a}_{233}$, $\overset{2}{a}_{311}$, $\overset{2}{a}_{322}$, $\overset{2}{a}_{123}$. При этом из этого тензора можно образовать вектор путем свертки

$$a_{(ijk)}g^{ij}=p_k. \tag{5.5}$$

Выделяя эту векторную составляющую, получим

$$\overset{2}{a}_{ijk}\equiv\frac{3}{5}\,p_{(i}g_{jk)}+s_{ijk}, \tag{5.6}$$

где

$$s_{ijk}\equiv a_{(ijk)}-\frac{3}{5}\,p_{(i}g_{jk)} \tag{5.7}$$

— так называемый *септор* [13], который имеет семь независимых компонент (отсюда и название).

Так как тензор $\underset{\sim}{a}$ (5.1) имеет 27 компонент, то на долю тензора $\underset{\sim}{b}$ (5.2) остается 16 независимых компонент. Записав разложение (5.3) для $a_{kij}$ и $a_{jki}$ и воспользовавшись определениями (3.7) и (3.11) гл. 1, получим тождество

$$b_{ijk}+b_{kij}+b_{jki}=0. \tag{5.8}$$

**Упражнение 5.1.** Показать, что для компонент тензора (5.2), удовлетворяющих тождеству (5.8), справедливо представление

$$b_{ijk} = \frac{2}{3}\left(b_{[ij]k} + b_{[ik]j}\right) + \frac{2}{3}\left(b_{i[jk]} + b_{j[ik]}\right). \qquad (5.9)$$

**Упражнение 5.2.** Доказать, используя формулу (5.9), что

$$\epsilon^{ijk} b_{ijk} \equiv 0. \; \bullet \qquad (5.10)$$

Так как каждому антисимметричному тензору второго ранга можно поставить в соответствие псевдотензор и, обратно, каждому псевдотензору — антисимметричный тензор второго ранга (формулы (2.35) и (2.36)), то тензору третьего ранга

$$\underset{\sim}{b} \equiv b_{[ij]k} \vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}^{\,j} \otimes \vec{e}^{\,k}, \qquad (5.11)$$

кососимметричному по первым двум индексам, можно поставить в соответствие псевдотензор второго ранга

$$\underset{\sim}{\omega} = \omega^{i}{}_{j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}^{\,j} = \omega^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \qquad (5.12)$$

по формуле

$$b_{[ij]k} = \sqrt{g}\, \epsilon_{ijm} \omega^{m}_{k} = \sqrt{g}\, \epsilon_{mij} g_{kl} \omega^{lm}. \qquad (5.13)$$

Аналогично вводим псевдотензор второго ранга

$$\underset{\sim}{\nu} = \nu^{i}{}_{j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \nu^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, \qquad (5.14)$$

такой, что

$$b_{i[jk]} = \sqrt{g}\, \epsilon_{mjk} \nu^{m}_{i} = \sqrt{g}\, \epsilon_{kmj} g_{il} \nu^{lm}. \qquad (5.15)$$

**Упражнение 5.3.** Используя формулу (2.3), показать, что из (5.13) следует

$$\omega^{ln} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \epsilon^{ijn} b_{[ij]k} g^{kl} = \frac{1}{2\sqrt{g}} g^{kl} \epsilon^{ijn} b_{ijk}. \qquad (5.16)$$

**Упражнение 5.4.** Показать, что из формулы (5.15) следует выражение для тензора $\underset{\sim}{\nu}$:

$$\nu^{ln} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \epsilon^{njk} b_{i[jk]} g^{il} = \frac{1}{2\sqrt{g}} g^{il} \epsilon^{njk} b_{ijk}. \; \bullet \qquad (5.17)$$

Таким образом, компоненты тензора $\underset{\sim}{b}$ можно представить, используя формулы (5.13) и (5.15), в виде

$$b_{ijk} = \frac{4}{3}\sqrt{g}\,[e_{mi(j}g_{k)l}\omega^{lm} + e_{km(j}g_{i)l}\nu^{lm}]. \tag{5.18}$$

**Упражнение 5.5.** Показать, что из выражений (5.16) и (5.17) следует, что

$$\omega^{ln}g_{ln} \equiv 0, \tag{5.19}$$

$$\nu^{ln}g_{ln} \equiv 0. \quad \bullet \tag{5.20}$$

Разобьем теперь тензоры $\underset{\sim}{\omega}$ и $\underset{\sim}{\nu}$ на симметричную и антисимметричную части:

$$\omega^{lm} = \omega^{(lm)} + \omega^{[lm]}, \tag{5.21}$$

$$\nu^{lm} = \nu^{(lm)} + \nu^{[lm]}, \tag{5.22}$$

причем, как следует из (5.19) и (5.20), симметричные части тензоров $\underset{\sim}{\omega}$ и $\underset{\sim}{\nu}$ являются девиаторами $\overline{\underset{\sim}{\omega}}$, $\overline{\underset{\sim}{\nu}}$, т. е. имеют по пяти независимым составляющим

$$\overline{\omega}^{ln} = \omega^{(ln)}, \tag{5.23}$$

$$\overline{\nu}^{ln} = \nu^{(ln)}. \tag{5.24}$$

Антисимметричные составляющие тензоров $\underset{\sim}{\omega}$ и $\underset{\sim}{\nu}$ можно выразить с помощью формулы (2.36) через соответствующие псевдовекторы

$$\omega^{[ij]} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\,e^{kij}\omega_k, \tag{5.25}$$

$$\nu^{[ij]} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\,e^{kij}\nu_k, \tag{5.26}$$

где согласно (2.35)

$$\omega_k \equiv \sqrt{g}\,e_{klm}\omega^{[lm]} = \sqrt{g}\,e_{klm}\omega^{lm}, \tag{5.27}$$

$$\nu_k \equiv \sqrt{g}\,e_{klm}\nu^{[lm]} = \sqrt{g}\,e_{klm}\nu^{lm}; \tag{5.28}$$

причем так как $\underset{\sim}{\omega}$ и $\underset{\sim}{\nu}$ — псевдотензоры, то $\vec{\omega}$ и $\vec{\nu}$ — истинные векторы.

Таким образом, тензор $\underset{\sim}{b}$ может быть выражен через два вектора $\vec{\omega}$ и $\vec{\nu}$ и два девиатора псевдотензоров $\underset{\sim}{\omega}$ и $\underset{\sim}{\nu}$, которые в общей сложности имеют 16 независимых компонент. Подставляя выражения (5.21)—(5.26) в (5.18) и используя формулы (2.3), получим

$$b_{ijk}=\frac{2}{3}\left(g_{jk}\omega_i-g_{ij}\nu_k-g_{i(j}\omega_{k)}+g_{k(i}\nu_{j)}\right)+$$

$$+\frac{4}{3}\sqrt{g}\left[\epsilon_{mi(j}g_{k)l}\overline{\omega}^{lm}+\epsilon_{km(j}g_{i)l}\overline{\nu}^{lm}\right]. \tag{5.29}$$

Итак, искомое представление произвольного тензора третьего ранга $\underset{\sim}{a}$ имеет вид

$$a_{ijk}=a_{[ijk]}+\frac{3}{5}p_{(i}g_{jk)}+\frac{2}{3}\left(g_{jk}\omega_i-g_{i(j}\omega_{k)}-\right.$$

$$\left.-g_{ij}\nu_k+g_{k(i}\nu_{j)}\right)+\frac{4}{3}g\left(\epsilon_{mi(j}g_{k)l}\overline{\omega}^{lm}+\epsilon_{km(j}g_{i)l}\overline{\nu}^{lm}\right)+s_{ijk}, \tag{5.30}$$

где компоненты векторов $\vec{p}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\nu}$ выражаются соответственно по формулам (5.5), (5.25), (5.26), девиаторов $\underset{\sim}{\overline{\omega}}$ и $\underset{\sim}{\overline{\nu}}$ — (5.23), (5.16); (5.24), (5.17), а сентора $s$ — по формуле (5.7).

Пусть теперь тензор $\underset{\sim}{a}$ (5.1) симметричен по первым двум индексам. Именно такие тензоры чаще всего встречаются в физике. Рассмотрим для простоты прямоугольную декартову систему координат. Как отмечалось в § 1, в такой системе координат исчезает разница между ковариантными и контравариантными компонентами, а фундаментальная матрица совпадает с символами Кронекера $\delta_{ij}$. Тогда (5.1) можно записать в виде

$$\underset{\sim}{a}=a_{ijk}\vec{k}_i\otimes\vec{k}_j\otimes\vec{k}_k;\quad a_{ijk}=a_{jik}. \tag{5.31}$$

Обозначим теперь компоненты векторов, полученные сверткой тензора (5.31) с единичным тензором, следующим образом:

$$a_{ijk}\delta_{ij}\equiv p_k, \tag{5.32}$$

$$a_{ijk}\delta_{jk}\equiv q_i. \tag{5.33}$$

Компоненты сентора $s_{ijk}$ обладают, очевидно, следующими свойствами:

$$s_{ijk}\delta_{ij}=0,\quad s_{ijk}\delta_{jk}=0,\quad s_{ijk}\epsilon_{ijk}=0. \tag{5.34}$$

Тем самым накладывается 11 ограничительных соотношений на, вообще говоря, 18 независимых компонент тензора третьего ранга, симметричного по первым двум индексам. Следовательно, и в этом случае имеется только семь независимых компонент септора.

**Упражнение 5.6.** Доказать, что компоненты ортогонального тензора (5.31) представляются в виде

$$a_{ijk}=\frac{2}{5}p_k\delta_{ij}-\frac{1}{5}p_{(i}\delta_{j)k}-\frac{1}{5}q_k\delta_{ij}+$$
$$+\frac{3}{5}q_{(i}\delta_{j)k}+\frac{2}{3}\epsilon_{km(i}\bar{\omega}_{j)m}+s_{ijk}, \tag{5.35}$$

где $\bar{\omega}_{jm}$ — компоненты девиатора симметричного тензора $\underset{\sim}{\omega}=\omega_{ij}\vec{k}_i\otimes\vec{k}_j$, определяемые соотношениями

$$\bar{\omega}_{in}\equiv a_{ijk}\epsilon_{jkn}+\frac{1}{2}\epsilon_{ikn}(q_k-p_k). \tag{5.36}$$

**Упражнение 5.7.** Показать, что в произвольной криволинейной системе координат представление (5.35) имеет вид

$$a_{ijk}=\frac{2}{5}p_kg_{ij}-\frac{1}{5}p_{(i}g_{j)k}-\frac{1}{5}q_kg_{ij}+$$
$$+\frac{3}{5}q_{(i}g_{j)k}+\frac{2}{3}\sqrt{g}\,\epsilon_{km(i}g_{j)l}\bar{\omega}^{lm}\pm s_{ijk}, \tag{5.37}$$

где

$$p_k\equiv a_{ijk}g^{ij},\quad q_i\equiv a_{ijk}g^{jk}, \tag{5.38}$$

$$\bar{\omega}^{ln}\equiv\frac{1}{\sqrt{g}}\left[g^{kl}\epsilon^{ijn}a_{ijk}\right]+\frac{1}{2}\epsilon^{kln}(q_k-p_k), \tag{5.39}$$

а компоненты септора удовлетворяют соотношениям

$$s_{ijk}g^{ij}=0,\quad s_{ijk}g^{jk}=0,\quad s_{ijk}\epsilon^{ijk}=0. \tag{5.40}$$

## § 6. Тензоры четвертого ранга

Рассмотрим теперь тензор четвертого ранга

$$\underset{\sim}{C}=c^{ijkl}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k\otimes\vec{e}_l. \tag{6.1}$$

Пусть выполняются свойства, связанные с симметри-