$$s_{ijk}\delta_{ij}=0,\ s_{ijk}\delta_{jk}=0,\ s_{ijk}\epsilon_{ijk}=0. \tag{5.34}$$

Тем самым накладывается 11 ограничительных соотношений на, вообще говоря, 18 независимых компонент тензора третьего ранга, симметричного по первым двум индексам. Следовательно, и в этом случае имеется только семь независимых компонент септора.

Упражнение 5.6. Доказать, что компоненты ортогонального тензора (5.31) представляются в виде

$$a_{ijk}=\frac{2}{5}p_k\delta_{ij}-\frac{1}{5}p_{(i}\delta_{j)k}-\frac{1}{5}q_k\delta_{ij}+$$
$$+\frac{3}{5}q_{(i}\delta_{j)k}+\frac{2}{3}\epsilon_{km(i}\overline{\omega}_{j)m}+s_{ijk}, \tag{5.35}$$

где $\overline{\omega}_{jm}$ — компоненты девиатора симметричного тензора $\underset{\sim}{\omega}=\omega_{ij}\vec{k}_i\otimes\vec{k}_j$, определяемые соотношениями

$$\overline{\omega}_{in}\equiv a_{ijk}\epsilon_{jkn}+\frac{1}{2}\epsilon_{ikn}(q_k-p_k). \tag{5.36}$$

Упражнение 5.7. Показать, что в произвольной криволинейной системе координат представление (5.35) имеет вид

$$a_{ijk}=\frac{2}{5}p_kg_{ij}-\frac{1}{5}p_{(i}g_{j)k}-\frac{1}{5}q_kg_{ij}+$$
$$+\frac{3}{5}q_{(i}g_{j)k}+\frac{2}{3}\sqrt{g}\,\epsilon_{km(i}g_{j)l}\overline{\omega}^{lm}+s_{ijk}, \tag{5.37}$$

где

$$p_k\equiv a_{ijk}g^{ij},\quad q_i\equiv a_{ijk}g^{jk}, \tag{5.38}$$

$$\overline{\omega}^{ln}\equiv\frac{1}{\sqrt{g}}[g^{kl}\epsilon^{ijn}a_{ijk}]+\frac{1}{2}\epsilon^{kln}(q_k-p_k), \tag{5.39}$$

а компоненты септора удовлетворяют соотношениям

$$s_{ijk}g^{ij}=0,\ s_{ijk}g^{jk}=0,\ s_{ijk}\epsilon^{ijk}=0. \tag{5.40}$$

§ 6. Тензоры четвертого ранга

Рассмотрим теперь тензор четвертого ранга

$$\underset{\sim}{C}=c^{ijkl}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k\otimes\vec{e}_l. \tag{6.1}$$

Пусть выполняются свойства, связанные с симметрией этого тензора:

$$c^{ijkl}=c^{jikl}=c^{ijlk}=c^{klij}. \qquad (6.2)$$

Благодаря этим свойствам тензор $\underset{\sim}{C}$ имеет всего 21 независимую компоненту.

Образуем два тензора второго ранга:

$$c^{ijkl}g_{kl}\equiv a^{ij}, \qquad (6.3)$$

$$c^{ijkl}g_{ik}\equiv b^{jl}. \qquad (6.4)$$

Из (6.2) следует, что тензоры $\underset{\sim}{a}$ и $\underset{\sim}{b}$ являются симметричными. Разложим их на шаровую и девиаторную составляющие:

$$a^{ij}=\frac{1}{3}\alpha g^{ij}+\bar{a}^{ij},\ \ \alpha\equiv\langle\underset{\sim}{a}\rangle=a^{ij}g_{ij}; \qquad (6.5)$$

$$b^{ij}=\frac{1}{3}\beta g^{ij}+\bar{b}^{ij},\ \ \beta\equiv\langle\underset{\sim}{b}\rangle=b^{ij}g_{ij}. \qquad (6.6)$$

Определим теперь тензор четвертого ранга

$$\underset{\sim}{n}=n^{ijkl}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k\otimes\vec{e}_l, \qquad (6.7)$$

который удовлетворяет следующим 12 соотношениям:

$$n^{ijkl}g_{kl}=0,\qquad n^{ijkl}g_{ik}=0. \qquad (6.8)$$

Очевидно, этот тензор имеет всего девять независимых компонент и поэтому называется *нонором* [13].

Упражнение 6.1. Доказать, что тензор $\underset{\sim}{C}$ может быть представлен в виде

$$c^{ijkl}=\frac{11\beta-12\alpha}{35}g^{ij}g^{kl}+\frac{11\alpha-13\beta}{70}(g^{ik}g^{jl}+g^{il}g^{jk})+$$

$$+\frac{5}{7}(g^{ij}a^{kl}+g^{kl}a^{ij})-\frac{4}{7}(g^{ij}b^{kl}+g^{kl}b^{ij})-$$

$$-\frac{2}{7}(g^{ik}a^{jl}+g^{il}a^{jk}+g^{jk}a^{il}+g^{jl}a^{ik})+$$

$$+\frac{3}{7}(g^{ik}b^{jl}+g^{il}b^{jk}+g^{jk}b^{il}+g^{jl}b^{ik})+n^{ijkl}, \qquad (6.9)$$

или

$$c^{ijkl}=\frac{2\alpha-\beta}{15}g^{ij}g^{kl}+\frac{3\beta-\alpha}{30}(g^{ik}g^{jl}+g^{il}g^{jk})+$$

$$+\frac{5}{7}(g^{ij}\bar{a}^{kl}+g^{kl}\bar{a}^{ij})-\frac{4}{7}(g^{ij}\bar{b}^{kl}+g^{kl}\bar{b}^{ij})-$$

$$-\frac{2}{7}\left(g^{ik}\overline{a}^{jl}+g^{il}\overline{a}^{jk}+g^{jk}\overline{a}^{il}+g^{jl}\overline{a}^{ik}\right)+$$

$$+\frac{3}{7}\left(g^{ik}\overline{b}^{jl}+g^{il}\overline{b}^{jk}+g^{jk}\overline{b}^{il}+g^{jl}\overline{b}^{ik}\right)+n^{ijkl}. \quad (6.10)$$

Следовательно, каждый тензор четвертого ранга $\underset{\sim}{C}$ (6.1), обладающий свойствами (6.2), может быть выражен через два скаляра, два девиатора и специальный тензор четвертого ранга — нонор.

Упражнение 6.2. Пусть два симметричных тензора второго ранга

$$\underset{\sim}{\sigma}=\sigma^{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j; \quad \underset{\sim}{\varepsilon}=\varepsilon_{ij}\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j \quad (6.11)$$

связаны между собой с помощью тензора $\underset{\sim}{C}$ (6.1), (6.2):

$$\sigma^{ij}=c^{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (6.12)$$

Обозначим разложение тензоров $\underset{\sim}{\sigma}$ и $\underset{\sim}{\varepsilon}$ на шаровую и девиаторную составляющие следующим образом:

$$\sigma^{ij}=\frac{1}{3}\Theta g^{ij}+s^{ij}, \quad \Theta\equiv\langle\underset{\sim}{\sigma}\rangle=\sigma^{ij}g_{ij}; \quad (6.13)$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{3}\theta g_{ij}+e_{ij}, \quad \theta\equiv\langle\underset{\sim}{\varepsilon}\rangle=\varepsilon_{ij}g^{ij}. \quad (6.14)$$

Доказать, что соотношения (6.12) могут быть записаны в виде

$$\theta=\frac{1}{3}\alpha\theta+e^{(a)}, \quad (6.15)$$

$$s_{ij}=\frac{1}{3}\overline{a}_{ij}\theta+\frac{3\beta-\alpha}{15}e_{ij}+\frac{8}{21}e^{(a)}g_{ij}-$$

$$-\frac{8}{7}e_{ij}^{(a)}+\frac{12}{7}e_{ij}^{(b)}-\frac{4}{7}e^{(b)}g_{ij}+n_{ij}^{kl}e_{kl}, \quad (6.16)$$

где

$$e^{(a)}\equiv\overline{a}^{ij}e_{ij},\ e_{ij}^{(a)}\equiv\frac{1}{2}\left(\overline{a}_i^k e_{kj}+\overline{a}_j^k e_{ki}\right), \quad (6.17)$$

$$e^{(b)}\equiv\overline{b}^{ij}e_{ij}; \quad e_{ij}^{(b)}\equiv\frac{1}{2}\left(\overline{b}_i^k e_{kj}+b_j^k e_{ki}\right). \quad \bullet \quad (6.18)$$

Если соотношения (6.12) можно обратить, т. е. выразить тензор $\underset{\sim}{\varepsilon}$ через $\underset{\sim}{\sigma}$:

$$\varepsilon_{ij}=d_{ijkl}\sigma^{kl}, \quad (6.19)$$

то очевидно тензоры $\underset{\sim}{C}$ (6.1) и $\underset{\sim}{D}$:

$$\underset{\sim}{D} = d_{ijkl}\vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \otimes \vec{e}^k \otimes \vec{e}^l \qquad (6.20)$$

являются взаимообратными:

$$\underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D} : \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{\Delta}, \qquad (6.21)$$

где $\underset{\sim}{\Delta}$ — так называемый единичный тензор четвертого ранга:

$$\underset{\sim}{\Delta} \equiv \frac{1}{2}(\delta^i_m \delta^j_n + \delta^i_n \delta^j_m)\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}^m \otimes \vec{e}^n. \qquad (6.22)$$

Поэтому соотношения (6.21) в «индексной» записи имеют вид

$$c^{ijkl}d_{klmn} = d_{mnkl}c^{klij} = \frac{1}{2}(\delta^i_m \delta^j_n + \delta^i_n \delta^j_m). \qquad (6.23)$$

Тензор $\underset{\sim}{D}$ обладает такой же симметрией, что и тензор $\underset{\sim}{C}$ (6.2). Образуя симметричные тензоры второго ранга $\underset{\sim}{p}$ и $\underset{\sim}{q}$,

$$p_{ij} = \frac{1}{3}\langle \underset{\sim}{p} \rangle g_{ij} + \bar{p}_{ij}, \quad p_{ij} \equiv d_{ijkl}g^{kl}, \qquad (6.24)$$

$$q_{ij} = \frac{1}{3}\langle \underset{\sim}{q} \rangle g_{ij} + \bar{q}_{ij}, \quad q_{ij} \equiv d_{kijl}g^{kl}, \qquad (6.25)$$

можно и для тензора $\underset{\sim}{D}$ построить разложения, аналогичные (6.9), (6.10).

Упражнение 6.3. Доказать, что

$$\frac{1}{3}\langle \underset{\sim}{a} \rangle \langle \underset{\sim}{p} \rangle + \bar{a}^{ij}\bar{p}_{ij} \equiv a^{ij}p_{ij} = 3. \qquad (6.26)$$

Упражнение 6.4. Выбрав в качестве девяти независимых компонент нонора

$$\begin{array}{l} n^{1111},\ n^{2222},\ n^{1122}, \\ n^{1112},\ n^{1113},\ n^{2212}, \\ n^{2223},\ n^{3313},\ n^{3323}, \end{array} \qquad (6.27)$$

показать, что остальные его компоненты с учетом симметрии (6.2) выражаются через них следующим образом:

$$n^{3333} = n^{1111} + n^{2222} + 2n^{1122},$$
$$n^{1133} = n^{1313} = -(n^{1111} + n^{1122}),$$

$$
\begin{aligned}
&n^{2233}=n^{2323}=-(n^{2222}+n^{1122}),\\
&n^{1212}=n^{1122},\\
&n^{2213}=n^{1223}=-(n^{1113}+n^{3313}),\\
&n^{3312}=n^{1323}=-(n^{1112}+n^{2212}),\\
&n^{1123}=n^{1213}=-(n^{2223}+n^{3323}).
\end{aligned}
\tag{6.28}
$$

§ 7. Вычисление площадей и объемов

Пусть в евклидовом пространстве $\mathscr{R}_3$ даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда их скалярное произведение имеет вид

$$
\vec{a}\cdot\vec{b}=g_{ij}a^ib^j=g^{ij}a_ib_j=a_ib^i=a^ib_i, \tag{7.1}
$$

где g_{ij} — фундаментальная матрица

$$
g_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j, \tag{7.2}
$$

а векторы $\vec{e}_i$ называются *векторами локального базиса*

$$
\vec{e}_i=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^i} \tag{7.3}
$$

($\vec{r}$ — радиус-вектор). Очевидно, что площадь параллелограмма s, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в каждой точке $\mathscr{R}_3$:

$$
s=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\alpha, \tag{7.4}
$$

где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выражаются согласно (7.1)

$$
|\vec{a}|=\sqrt{g_{ij}a^ia^j},\quad |\vec{b}|=\sqrt{g_{ij}b^ib^j}. \tag{7.5}
$$

Далее (как следует из § 2)

$$
\vec{a}\times\vec{b}=\sqrt{g}\,\epsilon_{ijk}a^ib^j\vec{e}^k=\frac{1}{\sqrt{g}}\,\epsilon^{ijk}a_ib_j\vec{e}_k. \tag{7.6}
$$

Выберем теперь такую систему координат α^i, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются коллинеарными базисным векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ соответственно, т. е.

$$
\vec{a}=a^1\vec{e}_1,\quad \vec{b}=b^2\vec{e}_2. \tag{7.7}
$$