$$
\begin{aligned}
&n^{2233}=n^{2323}=-(n^{2222}+n^{1122}),\\
&n^{1212}=n^{1122},\\
&n^{2213}=n^{1223}=-(n^{1113}+n^{3313}),\\
&n^{3312}=n^{1323}=-(n^{1112}+n^{2212}),\\
&n^{1123}=n^{1213}=-(n^{2223}+n^{3323}).
\end{aligned}
\tag{6.28}
$$

§ 7. Вычисление площадей и объемов

Пусть в евклидовом пространстве $\mathscr{R}_3$ даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда их скалярное произведение имеет вид

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=g_{ij}a^i b^j=g^{ij}a_i b_j=a_i b^i=a^i b_i, \tag{7.1}$$

где g_{ij} — фундаментальная матрица

$$g_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j, \tag{7.2}$$

а векторы $\vec{e}_i$ называются *векторами локального базиса*

$$\vec{e}_i=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^i} \tag{7.3}$$

($\vec{r}$ — радиус-вектор). Очевидно, что площадь параллелограмма s, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в каждой точке $\mathscr{R}_3$:

$$s=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\alpha, \tag{7.4}$$

где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выражаются согласно (7.1)

$$|\vec{a}|=\sqrt{g_{ij}a^i a^j},\quad |\vec{b}|=\sqrt{g_{ij}b^i b^j}. \tag{7.5}$$

Далее (как следует из § 2)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\sqrt{g}\,\epsilon_{ijk}a^i b^j\vec{e}^k=\frac{1}{\sqrt{g}}\,\epsilon^{ijk}a_i b_j\vec{e}_k. \tag{7.6}$$

Выберем теперь такую систему координат α^i, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются коллинеарными базисным векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ соответственно, т. е.

$$\vec{a}=a^1\vec{e}_1,\quad \vec{b}=b^2\vec{e}_2. \tag{7.7}$$

Тогда из формулы (7.4) согласно (7.5) имеем

$$s=\sqrt{g_{11}a^1a^1}\sqrt{g_{22}b^2b^2}\sin\alpha, \tag{7.8}$$

а формула (7.6) принимает вид

$$\vec{a}\times\vec{b}=\sqrt{g}\,a^1b^2\vec{e}^3. \tag{7.9}$$

Для косинуса угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ согласно той же формуле (7.5) и (7.1)

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}. \tag{7.10}$$

Так как для компоненты g^{33} матрицы g^{ij}, обратной к фундаментальной матрице g_{ij}, справедливо

$$g^{33}=\frac{1}{g}(g_{11}g_{22}-g_{12}^2), \tag{7.11}$$

где g, как и прежде, обозначает определитель матрицы g_{ij}, то

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{\frac{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}{g_{11}g_{22}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{g}\sqrt{g^{33}}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}. \tag{7.12}$$

Поэтому для (7.8) имеем

$$s=\sqrt{g}\;a^1b^2\sqrt{g^{33}},$$

и из (7.9)

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{g}\,a^1b^2|\vec{e}^3|=\sqrt{g}\,a^1b^2\sqrt{g^{33}}. \tag{7.13}$$

Сравнивая (7.12) и (7.13), находим

$$s=|\vec{a}\times\vec{b}|, \tag{7.14}$$

т. е. площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна длине вектора, полученного векторным произведением этих векторов.

Упражнение 7.1. Доказать, что формула (7.14) справедлива для произвольной ориентации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ относительно векторов репера, т. е.

$$s = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{g}\,|\epsilon_{ijk} a^i b^j \vec{e}^k| = \frac{1}{\sqrt{g}}\,|\epsilon^{ijk} a_i b_j \vec{e}_k|. \quad \bullet \tag{7.15}$$

Обозначим теперь векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектором $\vec{d}$:

$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}, \tag{7.16}$$

и пусть вектор $\vec{c}$ не лежит в плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. не ортогонален вектору $\vec{d}$. Тогда объем v параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, равен

$$v = s\,|\vec{c}|\cos\alpha, \tag{7.17}$$

или (в силу (7.16))

$$v = \vec{d} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}. \tag{7.18}$$

Сравнивая теперь формулы (7.18), (2.10) и (2.18) или (2.21), приходим к заключению, что

$$v = \sqrt{g}\,\epsilon_{ijk} a^i b^j c^k = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\epsilon^{ijk} a_i b_j c_k, \tag{7.19}$$

т. е. объем v параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, равен смешанному произведению этих векторов.

Учитывая, что $\cos\alpha$ в (7.17) может быть отрицательным, нужно в формулах (7.19) взять абсолютное значение соответствующих выражений, т. е.

$$v = \sqrt{g}\,|\epsilon_{ijk} a^i b^j c^k| = \frac{1}{\sqrt{g}}\,|\epsilon^{ijk} a_i b_j c_k|. \tag{7.20}$$

Рассмотрим теперь преобразование пространства $\mathscr{R}_3$, которое назовем *деформацией пространства* и которое заключается в том, что каждому радиус-вектору $\vec{r} \in \mathscr{R}_3$ соответствует некоторый радиус-вектор $\vec{R} \in \mathscr{R}_3'$ таким образом, что каждой тройке базисных векторов (7.3) соответствует тройка некомпланарных векторов

$$\vec{E}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha^i}. \tag{7.21}$$

При этом каждому вектору $\vec{a} \in \mathscr{R}_3$ соответствует вектор $\vec{A} \in \mathscr{R}_3'$, а тензору второго ранга $\underset{\sim}{t} \in \mathscr{R}_3 \otimes \mathscr{R}_3$ — тензор второго ранга $\underset{\sim}{T} \in \mathscr{R}_3' \otimes \mathscr{R}_3'$, причем компоненты вектора $\vec{a}$ в базисе (7.3) совпадают с компонентами вектора $\vec{A}$ в базисе (7.21), а компоненты тензора $\underset{\sim}{t}$ в базисе (7.3) — с соответствующими компонентами тензора $\underset{\sim}{T}$.

Обозначим фундаментальную матрицу пространства $\mathscr{R}_3'$ через G_{ij}

$$G_{ij} = \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j, \tag{7.22}$$

определитель этой матрицы G, а матрицу, обратную к G_{ij}, через G^{ij}. Тогда в $\mathscr{R}_3'$ базис, взаимный к (7.21), выражается следующим образом:

$$\vec{E}^i = G^{ij}\vec{E}_j. \tag{7.23}$$

Итак, в результате деформации квадрат линейного элемента

$$ds_0^2 = g_{ij}\,da^i da^j \tag{7.24}$$

преобразуется в

$$ds^2 = G_{ij}\,da^i da^j, \tag{7.25}$$

так что изменение расстояния между двумя бесконечно близкими точками l подсчитывается по формуле

$$l = \frac{ds}{ds_0} = \sqrt{\frac{G_{ij}\,da^i\,da^j}{g_{ij}\,da^i\,da^j}}. \tag{7.26}$$

Пусть $\vec{n}$ — единичный вектор в $\mathscr{R}_3$, характеризующий площадку s, построенную на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Из (7.15) следует, что

$$s\vec{n} = \sqrt{g}\,\epsilon_{ijk}a^i b^j \vec{e}^k, \tag{7.27}$$

откуда

$$sn_k = \sqrt{g}\,\epsilon_{ijk}a^i b^j. \tag{7.28}$$

Пусть $\vec{N}$ — единичный вектор в $\mathscr{R}_3'$

$$\vec{N} = N_i\vec{E}^i, \quad N_i N^i = 1, \tag{7.29}$$

характеризующий площадку S, построенную на векторах $\vec{A}$ и $\vec{B}$, в которые перешли соответственно векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в результате деформации. Таким образом,

$$S\vec{N} = \sqrt{G}\,\epsilon_{ijk} a^i b^j \vec{E}^k, \tag{7.30}$$

откуда

$$SN_k = \sqrt{G}\,\epsilon_{ijk} a^i b^j. \tag{7.31}$$

Сравнивая (7.28) и (7.31), видим, что в результате деформации площадь бесконечно малого параллелограмма s, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, связана с площадью S бесконечно малого параллелограмма, построенного на векторах $\vec{A}$ и $\vec{B}$, следующим образом (индекс k заменим на α):

$$\frac{SN_\alpha}{sn_\alpha} = \sqrt{\frac{G}{g}}, \tag{7.32}$$

причем

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i, \quad \vec{A} = a^i \vec{E}_i,$$
$$\vec{b} = b^i \vec{e}_i, \quad \vec{B} = b^i \vec{E}_i. \tag{7.33}$$

Если теперь построим на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ параллелепипед, то его объем v выразится по формуле (7.20). Объем параллелепипеда V, построенного на векторах $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, в которые перешли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, в результате деформации, подсчитывается по формуле

$$V = \sqrt{G}\,|\epsilon_{ijk} a^i b^j c^k|. \tag{7.34}$$

Сравнивая (7.20) и (7.34), находим

$$\frac{V}{v} = \sqrt{\frac{G}{g}}. \tag{7.35}$$

Формулы (7.32) и (7.35) можно объединить

$$\frac{SN_\alpha}{sn_\alpha} = \frac{V}{v} = \sqrt{\frac{G}{g}}. \tag{7.36}$$

Рассмотрим теперь некоторую точку M евклидова пространства $\mathscr{R}_3$. И пусть дан некоторый вектор $\vec{q}$

$$\vec{q}=q^i\vec{e}_i. \tag{7.37}$$

Проведем плоскость, ортогональную вектору $\vec{q}$ и проходящую на расстоянии h от точки M (рис. 11). Тогда эта плоскость пересечет линии направлений векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ соответственно в точках P, Q, R. Обозначим объем тетраэдра $MPQR$ через v_1, а пло-

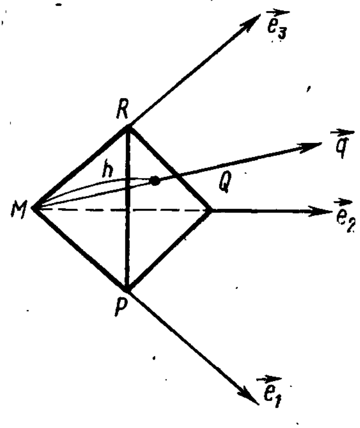

Рис. 11

щадь его грани MQR — через s_1, площадь треугольника MPR — через s_2, треугольника MPQ — через s_3, а треугольника PQR — через Σ. Обозначим также

$$\overrightarrow{MP}=\vec{a}=a^1\vec{e}_1,\quad \overrightarrow{MQ}=\vec{b}=b^2\vec{e}_2, \tag{7.38}$$
$$\overrightarrow{MR}=\vec{c}=c^3\vec{e}_3.$$

Тогда согласно формулам (7.20) и (7.15)

$$v=6v_1=\sqrt{g}\,a^1b^2c^3,$$
$$2s_1=\sqrt{g}\,b^2c^3\sqrt{g^{11}},\quad 2s_2=\sqrt{g}\,a^1c^3\sqrt{g^{22}}, \tag{7.39}$$
$$2s_3=\sqrt{g}\,a^1b^2\sqrt{g^{33}}.$$

Так как объем тетраэдра $MPQR$ равен

$$v_1 = \frac{1}{3} h\Sigma, \tag{7.40}$$

то из (7.39) следует, например,

$$\frac{3v_1}{c^3} = \frac{s_3}{\sqrt{g^{33}}} = \frac{\Sigma h}{c^3}. \tag{7.41}$$

Обозначим через β угол между векторами $\vec{q}$ и $\vec{e}_3$. Тогда очевидно, что

$$|\vec{c}| = \frac{h}{\cos\beta}. \tag{7.42}$$

Учитывая (7.38), получим

$$c^3 = \frac{h}{\cos\beta \sqrt{g_{33}}}. \tag{7.43}$$

Для косинуса угла β из (7.37) следует

$$\cos\beta = \frac{\vec{q}\cdot\vec{e}_3}{|\vec{q}|\sqrt{g_{33}}} = \frac{q_3}{\sqrt{g_{ij}q^iq^j}\sqrt{g_{33}}}. \tag{7.44}$$

Обозначим

$$q_0 \equiv |\vec{q}| = \sqrt{g_{ij}q^iq^j}. \tag{7.45}$$

Тогда формулы (7.41) можно записать в виде

$$\frac{3v_1}{hq_0} = \frac{\Sigma}{q_0} = \frac{s_1}{q_1\sqrt{g^{11}}} = \frac{s_2}{q_2\sqrt{q^{22}}} = \frac{s_3}{q_3\sqrt{g^{33}}}. \tag{7.46}$$

Упражнение 7.2. Пусть $\vec{n}$ — единичный вектор, сонаправлениый вектору $\vec{q}$ (7.37):

$$\vec{n} = n_i\vec{e}^i, \quad n_in^i = 1. \tag{7.47}$$

Доказать, что

$$n_i = \frac{q_i}{q_0}. \tag{7.48}$$

Упражнение 7.3. *Тензором деформации* называется симметричный тензор второго ранга $\underset{\sim}{\varepsilon}$, компоненты которого определяются соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(G_{ij} - g_{ij}). \tag{7.49}$$

Вектором перемещения $\vec{u}$ называется разность двух радиус-векторов $\vec{R}$ и $\vec{r}$:

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{u}. \tag{7.50}$$

Доказать, что

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u^k{}_{,i} u_{k,j}). \tag{7.51}$$

Упражнение 7.4. Относительным удлинением называется величина ε

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{ds^2 - ds_0^2}{ds_0^2}}. \tag{7.52}$$

Доказать, что для вектора $\vec{\xi} \in \mathscr{R}_3$ удлинение подсчитывается по формуле

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ij}\xi^i\xi^j} + 1} - 1. \tag{7.53}$$

Упражнение 7.5. Пусть два вектора $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ коллинеарны соответственно $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Доказать, что $\cos\alpha$ (α — угол между векторами, соответствующими $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ после деформации) подсчитывается по формуле

$$\cos\alpha = \frac{2\varepsilon_{12}}{\sqrt{(g_{11} + 2\varepsilon_{11})(g_{22} + 2\varepsilon_{22})}}. \tag{7.54}$$

§ 8. Дифференциальные операторы и интегральные теоремы

Мы познакомились с тремя видами умножения векторов в евклидовом пространстве $\mathscr{R}_3$. Пусть даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathscr{R}_3$. Тогда в результате скалярного произведения этих векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b^i \tag{8.1}$$

получается скалярная величина. В результате их векторного произведения