$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(G_{ij} - g_{ij}). \tag{7.49}$$

*Вектором перемещения* $\vec{u}$ называется разность двух радиус-векторов $\vec{R}$ и $\vec{r}$:

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{u}. \tag{7.50}$$

Доказать, что

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u^k{}_{,i}u_{k,j}). \tag{7.51}$$

**Упражнение 7.4.** Относительным удлинением называется величина $\varepsilon$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{ds^2 - ds_0^2}{ds_0^2}}. \tag{7.52}$$

Доказать, что для вектора $\vec{\xi} \in \mathscr{R}_3$ удлинение подсчитывается по формуле

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ij}\xi^i\xi^j} + 1} - 1. \tag{7.53}$$

**Упражнение 7.5.** Пусть два вектора $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ коллинеарны соответственно $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Доказать, что $\cos\alpha$ ($\alpha$ — угол между векторами, соответствующими $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ после деформации) подсчитывается по формуле

$$\cos\alpha = \frac{2\varepsilon_{12}}{\sqrt{(g_{11} + 2\varepsilon_{11})(g_{22} + 2\varepsilon_{22})}}. \tag{7.54}$$

## § 8. Дифференциальные операторы и интегральные теоремы

Мы познакомились с тремя видами умножения векторов в евклидовом пространстве $\mathscr{R}_3$. Пусть даны векторы $\vec{a}, \vec{b} \in \mathscr{R}_3$. Тогда в результате скалярного произведения этих векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b^i \tag{8.1}$$

получается скалярная величина. В результате их векторного произведения

$$\vec{a} \times \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} a_i b_j \vec{e}_k \tag{8.2}$$

получается вектор, а в результате их тензорного произведения

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = a_i b_j \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \tag{8.3}$$

получается тензор второго ранга. При этом, как уже было отмечено, в литературе иногда символ тензорного произведения опускается, т. е. соотношения (8.3) могут быть записаны в виде

$$\vec{a}\vec{b} = a_i b_j \vec{e}^i \vec{e}^j. \tag{8.4}$$

Конечно же, указанные выше операции умножения могут быть применены и к тензорам произвольного ранга. Отметим только, что если в умножении участвуют тензоры $\underset{\sim}{a}$ и $\underset{\sim}{b}$, один из которых имеет порядок $n$, а другой $m$, то при их скалярном произведении результирующий тензор имеет порядок $n+m-2$, при векторном произведении — порядок $n+m-1$, а при тензорном произведении $m+n$.

Введем дифференциальный вектор-оператор $\vec{\nabla}$ (набла), компонентами которого служат ковариантные производные:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}^i \nabla_i. \tag{8.5}$$

Умножим формально оператор $\vec{\nabla}$ на некоторый вектор $\vec{a}$ каждым из указанных выше способов, т. е. подействуем на векторное поле $\vec{a}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ дифференциальным оператором $\vec{\nabla}$ соответствующим образом.

В результате скалярного произведения имеем согласно (8.1)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \nabla_i a^i = a^i{}_{,i}. \tag{8.6}$$

В векторном анализе такая операция называется *дивергенцией вектора* $\vec{a}$ и обозначается

$$\operatorname{div} \vec{a} = a^i{}_{,i}. \tag{8.7}$$

Следовательно, формальное скалярное произведение оператора $\vec{\nabla}$ называется оператором div, т. е.

$$\vec{\nabla}\cdot \equiv \operatorname{div}. \tag{8.8}$$

Умножим теперь вектор-оператор $\vec{\nabla}$ на вектор $\vec{a}$ векторно (8.2)

$$\vec{\nabla}\times\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}\nabla_i a_j\vec{e}_k=\frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}a_{j,i}\vec{e}_k. \tag{8.9}$$

Такая операция в векторном анализе носит название *ротора или вращения вектора* $\vec{a}$

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}\nabla_i a_j\vec{e}_k. \tag{8.10}$$

Итак,

$$\vec{\nabla}\times\equiv\operatorname{rot}. \tag{8.11}$$

Теперь подвергнем воздействию оператором $\vec{\nabla}$ некоторую скалярную функцию $\varphi(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ путем тензорного произведения. Тогда согласно (8.3) или (8.4) получим

$$\vec{\nabla}\otimes\varphi=\vec{\nabla}\varphi=\nabla_i\varphi\vec{e}^i=\operatorname{grad}\varphi. \tag{8.12}$$

Тем самым операцию градиента можно записать формально в виде

$$\vec{\nabla}\otimes\equiv\operatorname{grad}. \tag{8.13}$$

Разумеется, все эти операции можно проводить с тензорами произвольного ранга. Так, например, градиент вектора $\vec{u}$

$$\operatorname{grad}\vec{u}=\vec{\nabla}\otimes\vec{u}=\nabla_i u_j\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j \tag{8.14}$$

является тензором второго ранга. Транспонирование этого выражения означает следующее:

$$\overset{\curvearrowright}{\operatorname{grad}}\,\vec{u}=\vec{u}\otimes\vec{\nabla}=\nabla_j u_i\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j. \tag{8.15}$$

Тем самым симметрирование градиента вектора $\vec{u}$ дает оператор деформирования def, который благодаря (8.14) и (8.15) имеет вид

$$\operatorname{def}\vec{u}\equiv\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\otimes\vec{u}+\vec{u}\otimes\vec{\nabla})=$$

$$=\frac{1}{2}(\nabla_i u_j+\nabla_j u_i)\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j. \tag{8.16}$$

Аналогично оператор rot, примененный к тензору второго ранга, дает в результате тензор второго ранга

$$\operatorname{rot} \underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ilk} \nabla_i \varepsilon_{jl} \vec{e}^{\,j} \otimes \vec{e}_k . \tag{8.17}$$

Транспонированное выражение (8.17) имеет вид

$$\overset{\frown}{\operatorname{rot}} \underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ilk} \nabla_j \varepsilon_{il} \vec{e}^{\,j} \otimes \vec{e}_k . \tag{8.18}$$

Тем самым оператор несовместимости Ink имеет вид

$$\operatorname{Ink} \underset{\sim}{\varepsilon} \equiv \overset{\frown}{\operatorname{rot}} \operatorname{rot} \underset{\sim}{\varepsilon} \equiv \frac{1}{g} \epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} \nabla_i \nabla_m \varepsilon_{jl} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_n . \tag{8.19}$$

В математической физике часто встречается оператор Лапласа

$$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \otimes = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \otimes . \tag{8.20}$$

Например, для скалярной функции $\varphi(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$

$$\Delta\varphi = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \varphi = g^{ij} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha^i} \right)_{,j} . \tag{8.21}$$

**Упражнение 8.1.** Доказать формулу

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u^i}{\partial \alpha^i} + \frac{u^i}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \alpha^i} \sqrt{g} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \alpha^i} (\sqrt{g}\, u^i). \tag{8.22}$$

**Упражнение 8.2.** Вычислить оператор $\Delta$ в цилиндрической и сферической системах координат применительно к скалярной величине $\varphi$, т. е. $\Delta\varphi$.

**Упражнение 8.3.** Вычислить оператор $\Delta$ в цилиндрической и сферической системе координат применительно к векторной величине $\vec{\varphi}$, т. е. $\Delta\vec{\varphi}$ и доказать различие величин $\Delta\varphi$ и $\Delta\varphi^i$.

**Упражнение 8.4.** Пусть дано векторное уравнение относительно некоторого симметричного тензора 2-го ранга $\underset{\sim}{\sigma}$ и заданного вектора $\vec{f}$:

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\sigma} = \vec{f}, \tag{8.23}$$

причем тензор $\underset{\sim}{\sigma}$ связан с другим симметричным тензором 2-го ранга $\underset{\sim}{\varepsilon}$ следующим образом:

$$\underset{\sim}{\sigma}=\lambda\langle\underset{\sim}{\varepsilon}\rangle\underset{\sim}{\mathcal{I}}+2\mu\underset{\sim}{\varepsilon}, \tag{8.24}$$

где $\lambda$, $\mu$ — некоторые постоянные, а тензор $\underset{\sim}{\varepsilon}$ связан с вектором $\vec{u}$ дифференциальными соотношениями (см. (8.16))

$$\underset{\sim}{\varepsilon}=\operatorname{def}\vec{u}. \tag{8.25}$$

Доказать, что в этом случае уравнения (8.23) можно записать в виде

$$\underset{\sim}{\Lambda}\cdot\vec{u}=\vec{f}, \tag{8.26}$$

где $\underset{\sim}{\Lambda}$ — дифференциальный тензор-оператор 2-го ранга (оператор Ламе)

$$\underset{\sim}{\Lambda}\equiv(\lambda+\mu)\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla}+\mu\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\underset{\sim}{\mathcal{I}}. \tag{8.27}$$

**Упражнение 8.5.** Доказать, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\equiv 0, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\equiv 0, \tag{8.28}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}=\operatorname{grad}\operatorname{div}-\operatorname{div}\operatorname{grad}. \tag{8.29}$$

**Упражнение 8.6.** Доказать, что если $\underset{\sim}{\varepsilon}=\operatorname{def}\vec{u}$, то

$$\operatorname{In}\operatorname{k}\underset{\sim}{\varepsilon}\equiv 0. \quad \bullet$$

Из математического анализа известно, что для непрерывных однозначных векторных функций $\vec{a}$, для которых существуют непрерывные частные производные в некотором объеме $V$ евклидова пространства $\mathcal{R}_3$ и на поверхности $\Sigma$, ограничивающей этот объем (причем $V$ ограничен и пространственно односвязан, а $\Sigma$ замкнута и регулярна), справедливы: теорема Остроградского — Гаусса (теорема о дивергенции)

$$\int\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\,dV=\int\limits_\Sigma \vec{n}\cdot\vec{a}\,d\Sigma, \tag{8.30}$$

теорема Стокса (теорема о роторе)

$$\int\limits_V \operatorname{rot}\vec{a}\,dV=\int\limits_\Sigma \vec{n}\times\vec{a}\,d\Sigma, \quad \int\limits_\Sigma \operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}\,d\Sigma=\oint\limits_L \vec{a}\cdot d\vec{r}, \tag{8.31}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $\Sigma$

$$\vec{n}=n_i\vec{e}^{\,i}, \quad n_i n_j g^{ij}=1, \tag{8.32}$$

а вектор $\vec{dr}$, касательный к контуру, определяет положительное направление контура $L$:

$$\vec{dr} = d\alpha^i \vec{e}_i. \qquad (8.33)$$

В силу того что формулы (8.30) — (8.31) имеют инвариантный характер, они могут быть применены к тензорам более высокого ранга. Например, для тензора 2-го ранга $\underset{\sim}{\sigma}$ (8.31) следует,

$$\int\limits_V \operatorname{div} \underset{\sim}{\sigma}\, dV = \int\limits_\Sigma \vec{n} \cdot \underset{\sim}{\sigma}\, d\Sigma, \quad \int\limits_V \sigma^{ij}{}_{,i}\, dV = \int\limits_\Sigma \sigma^{ij} n_i\, d\Sigma. \qquad (8.34)$$

**Упражнение 8.7.** Доказать, что для гладкого тензора 2-го ранга $\underset{\sim}{a}$ справедливо

$$\int\limits_\Sigma \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} a_{jm,i} n_k\, d\Sigma = \oint\limits_L a_{im}\, d\alpha^i.$$