ГЛАВА 4

ТЕНЗОРНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Группа симметрии тензора

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве R_3 задан закон перехода от одной системы координат $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ к другой $(\alpha^{1'}, \alpha^{2'}, \alpha^{3'})$:

$$\alpha^{i'} = \alpha^{i'}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \tag{1.1}$$

и обратно

$$\alpha^{i} = \alpha^{i}(\alpha^{1'}, \alpha^{2'}, \alpha^{3'}). \tag{1.2}$$

Разумеется, как и прежде (§ 2 гл. 1), мы считаем, что определители якобиевых матриц

$$A^{i'}{}_{i} \equiv \frac{\partial\alpha^{i'}}{\partial\alpha^{i}}, \quad B^{i}{}_{i'} \equiv \frac{\partial\alpha^{i}}{\partial\alpha^{i'}} \tag{1.3}$$

отличны от нуля и связаны между собой соотношениями

$$A^{i'}{}_{j} B^{j}{}_{j'} = \delta^{i'}{}_{j'}, \quad B^{i}{}_{j'} A^{j'}{}_{j} = \delta^{i}{}_{j}. \tag{1.4}$$

Рассмотрим теперь некоторый произвольный тензор $\underset{\sim}{a}$:

$$\underset{\sim}{a} = a^{i_1\cdot i_3 \ldots i_n}_{\cdot i_2} \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}^{i_2} \otimes \vec{e}_{i_3} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_n} \tag{1.5}$$

относительно группы преобразований (1.1). Очевидно, что

$$a^{i'_1\cdot i'_3 \ldots i'_n}_{\cdot i'_2} = A^{i'_1}_{\cdot i_1} B^{i_2}_{\cdot i'_2} A^{i'_3}_{\cdot i_3} \ldots A^{i'_n}_{\cdot i_n} a^{i_1\cdot i_3 \ldots i_n}_{\cdot i_2}. \tag{1.6}$$

Если группа преобразований (1.1) не изменяет значений компонент тензора $\underset{\sim}{a}$, т. е. из (1.6) следует

$$a^{i'_1\cdot i'_3 \ldots i'_n}_{\cdot i'_2} = \delta^{i'_1}_{i_1} \delta^{i_2}_{i'_2} \delta^{i'_3}_{i_3} \ldots \delta^{i'_n}_{i_n} a^{i_1\cdot i_3 \ldots i_n}_{\cdot i_2}, \tag{1.7}$$

то говорят, что группа преобразований (1.1) является *группой симметрии тензора* $\underset{\sim}{a}$ (группой G_a), или что тензор является *инвариантным относительно группы преобразований* (1.1).

Разумеется, группа симметрии G_a тензора $\underset{\sim}{a}$ относительно группы преобразований (1.1) может быть подгруппой группы преобразований (1.1). Например, тензор $\underset{\sim}{a}$, для которого справедливы соотношения (1.6), называется инвариантным относительно группы I (полной ортогональной группы трехмерного евклидового пространства):

$$x_{i'} = Q_{i'i}\, x_i, \tag{1.8}$$

где

$$Q_{i'i}\, Q_{i'j} = \delta_{ij}, \quad Q_{i'i}\, Q_{j'i} = \delta_{i'j'}, \tag{1.9}$$

если из

$$a_{i'_1 i'_2 \ldots i'_n} = Q_{i'_1 i_1}\, Q_{i'_2 i_2} \ldots Q_{i'_n i_n}\, a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \tag{1.10}$$

следует (1.7), т. е.

$$a_{i'_1 i'_2 \ldots i'_n} = \delta_{i'_1 i_1}\, \delta_{i'_2 i_2} \ldots \delta_{i'_n i_n}\, a_{i_1 i_2 \ldots i_n}. \tag{1.11}$$

В этом случае группой симметрии G_a тензора $\underset{\sim}{a}$ является группа I. Если к (1.9) добавить требование

$$Q \equiv \det |Q_{i'i}| = 1, \tag{1.12}$$

то группой симметрии G_a тензора $\underset{\sim}{a}$ будет группа I_0 (собственная ортогональная группа).

Упражнение 1.1. Показать, что множество тензоров заданного ранга n, инвариантных относительно группы G_a, образует конечномерное пространство R. ●

Обозначив через $\underset{\sim}{a}_{(1)}, \underset{\sim}{a}_{(2)}, \ldots, \underset{\sim}{a}_{(k)}$ базис этого пространства, любой тензор $\underset{\sim}{a}$ ранга n с группой симметрии G_a можно представить в виде линейной комбинации

$$\underset{\sim}{a} = \sum_{\alpha=1}^{k} \gamma_\alpha \underset{\sim}{a}_{(\alpha)}, \quad k \leqslant 3^n, \tag{1.13}$$

где γ_α — некоторые скаляры.

С помощью теории характеров матричных представлений (см. § 6 гл. 1) можно подсчитать k — число независимых компонент тензора $\underset{\sim}{a}$ ранга n, инвариантного относительно группы G_a, или, что то же самое, размерность линейного пространства R (см. упр. 1.1):

$$k = \frac{1}{N} \sum_{g \in G_a} \chi^0(g), \tag{1.14}$$

где N — порядок группы G_a (число ее элементов), а сумма производится по всем элементам g группы G_a.

Величины $\chi^0(g)$ подсчитываются по формуле

$$\chi^0(g) = \frac{1}{N_p} \sum_{p \in \mathscr{P}} \chi(g^{l_1}) \chi(g^{l_2}) \ldots \chi(g^{l_n}), \tag{1.15}$$

где N_p — порядок симметрической группы индексов тензора $\underset{\sim}{a}$ ранга n, χ — характер матричного представления группы G_a, а $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — длины циклов подстановок группы $\mathscr{P}$.

Пусть, например, нам нужно найти число независимых компонент тензора четвертого ранга $\underset{\sim}{C}$, обладающего симметрией (см. (6.2) гл. 3):

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}. \tag{1.16}$$

Нетрудно видеть, что симметрия (1.16) определяется группой подстановок $\mathscr{P}$:

$$\begin{gathered} e;\ (12);\ (34);\ (12)(34);\ (13)(24); \\ (14)(23);\ (1423);\ (1324), \end{gathered} \tag{1.17}$$

где e — тождественная подстановка. Таким образом, имеем 8 элементов p_α группы $\mathscr{P}$ ($\alpha = 1, \ldots, 8$) с длинами циклов

$$\begin{aligned} &p_1\colon\ l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1, \\ &p_2\colon\ l_1 = 2,\ l_2 = l_3 = 1, \\ &p_3\colon\ l_1 = 2,\ l_2 = l_3 = 1, \\ &p_4\colon\ l_1 = l_2 = 2, \\ &p_5\colon\ l_1 = l_2 = 2, \\ &p_6\colon\ l_1 = l_2 = 2, \\ &p_7\colon\ l_1 = 4, \\ &p_8\colon\ l_1 = 4. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Поэтому формула (1.15) для данного случая имеет вид

$$\chi^0(g) = \frac{1}{8}[\chi^4(g) + 2\chi(g^2)\chi^2(g) + 3\chi^2(g^2) + 2\chi(g^4)]. \tag{1.19}$$

Пусть, например, рассматривается ортотропная среда. Тогда, используя характеры (6.56) представления (6.48) группы O (глава 1), получим

$$\chi^0(g_1) = \frac{1}{8}(3^4 + 2\cdot3\cdot3^2 + 3\cdot3^2 + 2\cdot3) = 21,$$

$$\chi^0(g_2) = \chi^0(g_3) = \chi^0(g_4) = \frac{1}{8}(1^4 + 2\cdot3\cdot1^2 + 3\cdot3^2 + 2\cdot3) = 5,$$

$$\chi^0(g_5) = \chi^0(g_6) = \chi^0(g_7) = \frac{1}{8}[(-1)^4 + 2\cdot3\cdot(-1)^2 + 3\cdot3^2 + 2\cdot3] = 5, \tag{1.20}$$

$$\chi^0(g_8) = \frac{1}{8}[(-3)^4 + 2\cdot3\cdot(-3)^2 + 3\cdot3^2 + 2\cdot3] = 21,$$

где

$$g_1 = E,\ g_2 = S_1,\ g_3 = S_2,\ g_4 = S_3,\ g_5 = D_1,\ g_6 = D_2,\ g_7 = D_3,\ g_8 = C. \tag{1.21}$$

Поэтому из (1.14) имеем

$$k = \frac{1}{8}(21 + 3\cdot5 + 3\cdot5 + 21) = 9. \tag{1.22}$$

Упражнение 1.2. Показать, используя формулы (1.14), (1.19) и (6.55), (6.47) гл. 1, что для тензора четвертого ранга C, инвариантного относительно группы отражения относительно плоскости $x_1=0$ и обладающего симметрией (1.16), число независимых компонент $k=13$.

Упражнение 1.3. Показать, используя формулы (1.14), (1.19) и (6.54), (6.46) гл. 1, что для тензора четвертого ранга C, инвариантного относительно группы инверсий и обладающего симметрией (1.10), число независимых компонент $k=21$. ●

Для тензора третьего ранга, симметричного относительно первых двух индексов, группа $\mathscr{P}$ состоит из двух элементов:

$$e,\ (12), \tag{1.23}$$

причем

$$p_1\colon\ l_1=l_2=l_3=1, \tag{1.24}$$

$$p_2\colon\ l_1=2,\ l_2=1.$$

Поэтому из (1.15) имеем

$$\chi^0(g)=\frac{1}{2}[\chi^3(g)+\chi(g^2)\chi(g)]. \tag{1.25}$$

Для симметричного тензора второго ранга группа $\mathscr{P}$ также состоит из двух элементов (1.23), причем

$$p_1\colon\ l_1=l_2=1, \tag{1.26}$$

$$p_2\colon\ l_1=2.$$

Тогда из (1.15) получается

$$\chi^0(g)=\frac{1}{2}[\chi^2(g)+\chi(g^2)]. \tag{1.27}$$

Заметим, что если тензор n-ранга не обладает никакой симметрией, то

$$\chi^0(g)=\chi^n(g), \tag{1.28}$$

и в этом случае формула (1.14) имеет вид

$$k=\frac{1}{N}\sum_{g\in G_a}\chi^n(g). \tag{1.29}$$

Упражнение 1.4. Показать, что для тензоров, инвариантных относительно группы O (ортотропных тензоров), число независимых компонент k: а) равно нулю для любого тензора нечетного ранга (что следует из (1.29)), в частности, для тензора третьего ранга, симметричного по первым двум индексам (что следует из (1.25); б) равно 3 для симметричного тензора второго ранга (что следует из (1.27)).

Упражнение 1.5. Показать, что для тензоров, инвариантных относительно группы отражений относительно плоскости $x_1=0$, число независимых компонент k: а) равио 10 для тензора третьего ранга, симметричного по первым двум индексам; б) равно 4 для симметричного тензора второго ранга; в) равно 2 для вектора. ●

Для иепрерывных групп формула (1.14) несколько видоизменяется. Так, для группы T_3 трансверсальной изотропии

$$k=\frac{1}{2\pi}\int_{C}^{2\pi}\chi^0(g)\,d\varphi, \tag{1.30}$$

а для собственной ортогональной группы I_0:

$$k=\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}d\varphi_1\int_0^{2\pi}d\varphi_2\int_0^{\pi}\chi^0(g)\sin\theta\,d\theta. \tag{1.31}$$

Упражнение 1.6. Показать, используя формулу (1.30), что для тензоров, инвариантных относительно группы T_3 (трансверсально изотропных), число независимых компонент k: а) равно 5 для тензора четвертого ранга, обладающего симметрией (1.16), что следует из (1.19) и (6.57) гл. 1; б) равно 4 для тензора третьего ранга, симметричного по первым двум индексам, что следует из (1.25); в) равно 2 для симметричного тензора второго ранга, что следует из (1.27); г) равно 1 для вектора, что следует из $\chi^0(g)=$ $=\chi(g)$.

Упражнение 1.7. Показать, используя формулу (1.31), что для тензоров, инвариантных относительно группы I_0 (изотропных тензоров), число независимых компонент k: а) равно 2 для тензора четвертого ранга, обладающего симметрией (1.16), что следует из (1.19) и (6.58) гл. 1; б) равно нулю для всех тензоров нечетного ранга, в том числе и для тензора третьего ранга, симметричного относительно первых двух индексов, что следует из (1.28) и (1.25); в) равно 1 для симметричного тензора второго ранга, что следует из (1.27). ●

Часто при рассмотрении групп бесконечного порядка полезной оказывается теорема о том, что любой тензор ранга $r<n$, инвариантный относительно группы поворотов вокруг некоторой оси на углы, кратные $2\pi/n$, инвариантен также и относительно группы поворотов вокруг той же оси на любой угол φ.

§ 2. Тензорный базис

В предыдущем параграфе мы дали определение группы симметрии произвольного тензора $\underset{\sim}{a}$. Любой тензор произвольного ранга в трехмерном евклидовом