ной изотропии

$$k = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{C}}^{2\pi} \chi^0(g)\, d\varphi, \tag{1.30}$$

а для собственной ортогональной группы I_0:

$$k = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^{\pi} \chi^0(g) \sin\theta\, d\theta. \tag{1.31}$$

Упражнение 1.6. Показать, используя формулу (1.30), что для тензоров, инвариантных относительно группы T_3 (трансверсально изотропных), число независимых компонент k: а) равно 5 для тензора четвертого ранга, обладающего симметрией (1.16), что следует из (1.19) и (6.57) гл. 1; б) равно 4 для тензора третьего ранга, симметричного по первым двум индексам, что следует из (1.25); в) равно 2 для симметричного тензора второго ранга, что следует из (1.27); г) равно 1 для вектора, что следует из $\chi^0(g) = \chi(g)$.

Упражнение 1.7. Показать, используя формулу (1.31), что для тензоров, инвариантных относительно группы I_0 (изотропных тензоров), число независимых компонент k: а) равно 2 для тензора четвертого ранга, обладающего симметрией (1.16), что следует из (1.19) и (6.58) гл. 1; б) равно нулю для всех тензоров нечетного ранга, в том числе и для тензора третьего ранга, симметричного относительно первых двух индексов, что следует из (1.28) и (1.25); в) равно 1 для симметричного тензора второго ранга, что следует из (1.27). ●

Часто при рассмотрении групп бесконечного порядка полезной оказывается теорема о том, что любой тензор ранга $r<n$, инвариантный относительно группы поворотов вокруг некоторой оси на углы, кратные $2\pi/n$, инвариантен также и относительно группы поворотов вокруг той же оси на любой угол φ.

§ 2. Тензорный базис

В предыдущем параграфе мы дали определение группы симметрии произвольного тензора $\underset{\sim}{a}$. Любой тензор произвольного ранга в трехмерном евклидовом пространстве R_3, инвариантный относительно заданной подгруппы G полной ортогональной группы I, можно представить в виде линейной комбинации тензоров, составленных при помощи операций тензорного умножения и свертывания из соответствующих наборов тензоров, определяющих эту подгруппу G (см. раздел «Некоторые литературные указания» [4.5]).

Таким образом, для каждой группы преобразований G можно построить некоторый конечный тензорный базис (каждый тензор, входящий в него, является инвариантным относительно группы G) и на его основе конструировать различные тензоры, инвариантные относительно рассматриваемой группы G. Тензоры, входящие в такой базис, будем называть также *образующими тензорами группы G.*

Чтобы найти эти образующие тензоры группы G, рассмотрим некий полином P от $\varkappa$ векторов $\vec{b}^{(1)}$, $\vec{b}^{(2)}, \ldots, \vec{b}^{(\varkappa)}$, являющийся инвариантом относительно группы G. Это означает, что если

$$b_i'^{(n)} = Q_{ij} b_j^{(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots, \varkappa, \tag{2.1}$$

где матрица Q является элементом группы G, то

$$P(\vec{b}^{(1)}, \vec{b}^{(2)}, \ldots, \vec{b}^{(\varkappa)}) = P(\vec{b}'^{(1)}, \vec{b}'^{(2)}, \ldots, \vec{b}'^{(\varkappa)}). \tag{2.2}$$

Предположим, что полином P имеет вид

$$P = a_{i_1 i_2 \ldots i_\varkappa} b_{i_1}^{(1)} b_{i_2}^{(2)} \ldots b_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}, \tag{2.3}$$

где коэффициенты $a_{i_1 i_2 \ldots i_\varkappa}$ удовлетворяют условиям (1.10), (1.11), инвариантны относительно группы G (которая является подгруппой группы I). Тогда из (2.1) имеем

$$P' \equiv a_{i_1 \ldots i_\varkappa} b_{i_1}'^{(1)} \ldots b_{i_\varkappa}'^{(\varkappa)} = a_{i_1 \ldots i_\varkappa} Q_{i_1 j_1} \ldots Q_{i_\varkappa j_\varkappa} \times$$
$$\times b_{j_1}^{(1)} \ldots b_{j_\varkappa}^{(\varkappa)} = a_{j_1 \ldots j_\varkappa} b_{j_1}^{(1)} \ldots b_{j_\varkappa}^{(\varkappa)} \equiv P, \tag{2.4}$$

т. е. P инвариантен относительно группы G.

Таким образом, если коэффициенты полинома P векторов $\vec{b}^{(1)}, \ldots, \vec{b}^{(\varkappa)}$, линейного относительно каждого вектора, инвариантны относительно некоторой группы G, то и сам полином инвариантен относительно этой же группы.

Справедливо и обратное утверждение. В самом деле, пусть полином P, линейный относительно каждого из векторов $\vec{b}^{(1)}, \ldots, \vec{b}^{(\varkappa)}$, инвариантен относительно группы G: $P=P'$, т. е.

$$a_{i_1\ldots i_\varkappa} b_{i_1}^{(1)} \ldots b_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = a_{i_1\ldots i_\varkappa} b_{i_1}^{'(1)} \ldots b_{i_\varkappa}^{'(\varkappa)} =$$

$$= a_{i_1\ldots i_\varkappa} Q_{i_1 j_1} \ldots Q_{i_\varkappa j_\varkappa} b_{j_1}^{(1)} \ldots b_{j_\varkappa}^{(\varkappa)} = a'_{j_1\ldots j_\varkappa} b_{j_1}^{(1)} \ldots b_{j_\varkappa}^{(\varkappa)}. \quad (2.5)$$

Сравнивая первое и последнее выражения и учитывая, что каждый индекс j_α $(\alpha=1, \ldots, \varkappa)$ — немой, получим

$$a_{i_1\ldots i_\varkappa} = a'_{i_1\ldots i_\varkappa}, \quad (2.6)$$

т. е. коэффициенты полинома P инвариантны относительно группы G. Предположим теперь, что какой-то полином P_α составлен только из векторов $\vec{b}^{(1)}, \vec{b}^{(2)}, \ldots$ $\ldots, \vec{b}^{(\alpha)}$ $(\alpha \leqslant \varkappa)$, полином P_β — из векторов $\vec{b}^{(\alpha+1)}$, $\vec{b}^{(\alpha+2)}, \ldots, \vec{b}^{(\beta)}$ $(\alpha \leqslant \beta \leqslant \varkappa)$ и т. д., полином $P_\varkappa$ составлен из векторов $\vec{b}^{(\gamma+1)}, \vec{b}^{(\gamma+2)}, \ldots, \vec{b}^{(\varkappa)}$ $(\alpha \leqslant \beta \leqslant \ldots \leqslant \gamma \leqslant \varkappa)$. Пусть все указанные полиномы инвариантны относительно группы G, причем полином P может быть представлен в виде некой суммы

$$P = \Sigma A_{\alpha\beta\ldots\varkappa} P_\alpha P_\beta \ldots P_\varkappa. \quad (2.7)$$

В силу того что полином P линеен относительно каждого из векторов $\vec{b}^{(1)}, \vec{b}^{(2)}, \ldots, \vec{b}^{(\varkappa)}$, то и каждый из полиномов $P_\alpha, P_\beta, \ldots, P_\varkappa$ обладает таким же свойством.

Очевидно, что

$$a_{i_1\ldots i_\varkappa} = \frac{\partial^\varkappa P}{\partial b_{i_1}^{(1)} \partial b_{i_2}^{(2)} \ldots \partial b_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}} = \Sigma A_{\alpha\beta\ldots\varkappa} \frac{\partial^\varkappa (P_\alpha P_\beta \ldots P_\varkappa)}{\partial b_{i_1}^{(1)} \partial b_{i_2}^{(2)} \ldots \partial b_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}} =$$

$$= \Sigma A_{\alpha\beta\ldots\varkappa} \frac{\partial^\alpha P_\alpha}{\partial b_{i_1}^{(1)} \ldots \partial b_{i_\alpha}^{(\alpha)}} \frac{\partial^{\beta-\alpha} P_\beta}{\partial b_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)} \ldots \partial b_{i_\beta}^{(\beta)}} \cdots \frac{\partial^{\varkappa-\gamma} P_\varkappa}{\partial b_{i_{\gamma+1}}^{(\gamma+1)} \ldots \partial b_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}}. \quad (2.8)$$

Следовательно, любой тензор с компонентами $a_{i_1\ldots i_\varkappa}$, инвариантный относительно группы G, можно представить в виде суммы произведений тензоров типа $\partial^\alpha P^\alpha / \partial b_{i_1}^{(1)} \ldots \partial b_{i_\alpha}^{(\alpha)}$.

Рассмотрим, например, группу ортотропии O (см. упр. 3.12 гл. 1). Тогда полином, линейный относительно каждого из векторов $\vec{b}^{(1)}, \ldots, \vec{b}^{(\alpha)}$ и коэффициентами которого являются компоненты искомого тензора, инвариантного относительно группы ортотропии, должен быть инвариантным относительно преобразований, описывающих группу ортотропии, т. е. полином не должен изменяться в результате данных преобразований. Поэтому должны выполняться, например, соотношения

$$
\begin{aligned}
&P\left(b_1^{(1)} b_2^{(1)} b_3^{(1)}, \ldots, b_1^{(\alpha)} b_2^{(\alpha)} b_3^{(\alpha)}\right) = \\
&= P\left(-b_1^{(1)} b_2^{(1)} b_3^{(1)}, \ldots, -b_1^{(\alpha)} b_2^{(\alpha)} b_3^{(\alpha)}\right) = \\
&= P\left(b_1^{(1)} \left(-b_2^{(1)}\right) b_3^{(1)}, \ldots, b_1^{(\alpha)} \left(-b_2^{(\alpha)}\right) b_3^{(\alpha)}\right) = \\
&= P\left(b_1^{(1)} b_2^{(1)} \left(-b_3^{(1)}\right), \ldots, b_1^{(\alpha)} b_2^{(\alpha)} \left(-b_3^{(\alpha)}\right)\right).
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Отсюда видно, что полином P должен выражаться через полиномы

$$b_1^{(\alpha)} b_1^{(\beta)}, \; b_2^{(\alpha)} b_2^{(\beta)}, \; b_3^{(\alpha)} b_3^{(\beta)}, \; \alpha \neq \beta. \tag{2.10}$$

Следовательно, для *ортотропного тензора образующими* будут тензоры:

$$
\begin{aligned}
\gamma_{ij}^{(1)} &= \frac{\partial^2 \left(b_1^{(\alpha)} b_1^{(\beta)}\right)}{\partial b_i^{(\alpha)} \partial b_j^{(\beta)}} = \delta_{1i}\delta_{1j}, \\
\gamma_{ij}^{(2)} &= \frac{\partial^2 \left(b_2^{(\alpha)} b_2^{(\beta)}\right)}{\partial b_i^{(\alpha)} \partial b_j^{(\beta)}} = \delta_{2i}\delta_{2j}, \\
\gamma_{ij}^{(3)} &= \frac{\partial^2 \left(b_3^{(\alpha)} b_3^{(\beta)}\right)}{\partial b_i^{(\alpha)} \partial b_j^{(\beta)}} = \delta_{3i}\delta_{3j}.
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

Поэтому любой ортотропный тензор можно выразить через эти три линейно независимых тензора.

Упражнение 2.1. Доказать, что всякие ортотропные тензоры второго и четвертого рангов (см. (6.3) и (6.1) гл. 3) могут быть выражены в виде

$$a_{ij} = a_1\delta_{i1}\delta_{j1} + a_2\delta_{i2}\delta_{j2} + a_3\delta_{i3}\delta_{j3}, \tag{2.12}$$

$$
\begin{aligned}
c_{ijkl} = {} & c_1\delta_{i1}\delta_{j1}\delta_{k1}\delta_{l1} + c_2\delta_{i2}\delta_{j2}\delta_{k2}\delta_{l2} + \\
& + c_3\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k3}\delta_{l3} + c_4(\delta_{i1}\delta_{j1}\delta_{k2}\delta_{l2} + \delta_{i2}\delta_{j2}\delta_{k1}\delta_{l1}) + \\
& + c_5(\delta_{i1}\delta_{j1}\delta_{k3}\delta_{l3} + \delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k1}\delta_{l1}) + c_6(\delta_{i2}\delta_{j2}\delta_{k3}\delta_{l3} + \\
& + \delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k2}\delta_{l2}) + c_7(\delta_{i1}\delta_{k1}\delta_{j2}\delta_{l2} + \delta_{i2}\delta_{k2}\delta_{l1}\delta_{j1}) + \\
& + c_8(\delta_{i1}\delta_{k1}\delta_{j3}\delta_{l3} + \delta_{i3}\delta_{k3}\delta_{j1}\delta_{l1}) + \\
& + c_9(\delta_{i2}\delta_{k2}\delta_{j3}\delta_{l3} + \delta_{i3}\delta_{k3}\delta_{j2}\delta_{l2}). \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

Упражнение 2.2. Доказать, что образующие тензоры группы трансверсальной изотропии T_3 могут быть выбраны, например, в одном из следующих видов:

$$\delta_{ij}, \quad \delta_{3i}, \qquad (2.14)$$

$$\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}, \quad \delta_{3i}. \qquad (2.15)$$

Упражнение 2.3. Доказать, что образующими тензорами *гиротропии*, т. е. тензорами, инвариантными относительно собственно ортогональной группы I_0 (группы вращений), являются тензоры

$$\delta_{ij}, \quad \epsilon_{ijk}. \qquad (2.16)$$

Упражнение 2.4. Доказать, что образующим тензором изотропии, т. е. тензором, инвариантным относительно полной ортогональной группы I, является единственный тензор

$$\delta_{ij}. \qquad (2.17)$$

Упражнение 2.5. Доказать, что трансверсально изотропные тензоры второго и четвертого рангов, обладающие симметрией, указанной в упражнении (2.1), могут быть представлены в виде

$$a_{ij} = a_1(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}) + a_2\delta_{3i}\delta_{3j}, \qquad (2.18)$$

$$
\begin{aligned}
c_{ijkl} = {} & c_1\delta_{ij}\delta_{kl} + c_2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \\
& + c_3\delta_{3i}\delta_{3j}\delta_{3k}\delta_{3l} + c_4(\delta_{ij}\delta_{3k}\delta_{3l} + \delta_{kl}\delta_{3i}\delta_{3j}) + \\
& + c_5(\delta_{ik}\delta_{3j}\delta_{3l} + \delta_{il}\delta_{3j}\delta_{3k} + \delta_{jk}\delta_{3i}\delta_{3l} + \delta_{jl}\delta_{3i}\delta_{3k}). \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

Упражнение 2.6. Доказать, что изотропные и гиротропные тензоры второго и четвертого рангов, обладающие указанной в предыдущих упражнениях симметрией, выражаются однозначно в виде

$$a_{ij} = a\delta_{ij}, \qquad (2.20)$$

$$c_{ijkl}=c_1\delta_{ij}\delta_{kl}+c_2(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}). \quad \bullet \tag{2.21}$$

В § 4 предыдущей главы было показано, что всякий симметричный тензор второго ранга может быть однозначно представлен в виде суммы шарового тензора и девиатора

$$\underset{\sim}{b}=\frac{1}{3}\langle\underset{\sim}{b}\rangle\underset{\sim}{\mathcal{J}}+\underset{\sim}{\bar{b}} \tag{2.22}$$

или для компонент тензора (в этой главе мы рассматриваем исключительно прямоугольные декартовы системы координат):

$$b_{ij}=\frac{1}{3}\langle\underset{\sim}{b}\rangle\delta_{ij}+\bar{b}_{ij}. \tag{2.23}$$

Заметим, что тензоры $\underset{\sim}{\mathcal{J}}$ и $\underset{\sim}{\bar{b}}$ ортогональны между собой:

$$\underset{\sim}{\bar{b}}:\underset{\sim}{\mathcal{J}}=\bar{b}_{ij}\delta_{ij}=0. \tag{2.24}$$

Кроме того, шаровой тензор, как следует из упражнений 2.3, 2.4, инвариантен относительно групп I, I_0. Покажем, что всякое, в том числе ортогональное, преобразование

$$x_{i'}=Q_{i'i}x_i,\quad Q_{i'i}Q_{j'i}=\delta_{i'j'},\quad Q_{i'i}Q_{i'j}=\delta_{ij} \tag{2.25}$$

переводит девиатор в девиатор. В самом деле, пусть

$$\bar{b}_{ij}=Q_{ii'}Q_{jj'}\bar{b}'_{i'j'}. \tag{2.26}$$

По определению девиатора и из (2.24)

$$\bar{b}'_{i'j'}\delta_{i'j'}=0 \tag{2.27}$$

следует, что

$$Q_{ii'}Q_{jj'}\bar{b}'_{i'j'}\delta_{ij}=0, \tag{2.28}$$

откуда, учитывая (2.25), получаем

$$\bar{b}'_{i'j'}\delta_{i'j'}=0. \tag{2.29}$$

Таким образом, пространство симметричных тензоров второго ранга разбивается на два взаимно ортогональных подпространства, инвариантных относительно полной ортогональной группы I.

Рассмотрим теперь какую-нибудь подгруппу G полной ортогональной группы I. Всякий симметричный тензор второго ранга можно разложить на сумму попарно ортогональных симметричных тензоров второго ранга (*спектральное представление тензора*):

$$\underset{\sim}{b} = \sum_{\alpha=1}^{n} \underset{\sim}{p}^{(\alpha)}, \quad n \leqslant 6, \tag{2.30}$$

$$\underset{\sim}{p}^{(\alpha)} : \underset{\sim}{p}^{(\beta)} = 0, \text{ если } \alpha \neq \beta. \tag{2.31}$$

Если каждая матрица группы G отображает подпространство *p-тензоров* $\underset{\sim}{p}^{(\alpha)}$ в себя, то это *подпространство инвариантно* относительно G. Очевидно, что величины

$$I_\alpha \equiv (\underset{\sim}{p}^{(\alpha)} : \underset{\sim}{p}^{(\alpha)})^{1/2} \tag{2.32}$$

будут инвариантами тензора $\underset{\sim}{b}$. Объединяя (2.31) и (2.32), имеем

$$\frac{p_{ij}^{(\alpha)} p_{ij}^{(\beta)}}{I_\alpha I_\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{2.33}$$

Инвариант $I_\varkappa$ (2.32) назовем *линейным*, если

$$p_{ij}^{(\varkappa)} = \frac{a_{ij}^{(\varkappa)}}{a_\varkappa} I_\varkappa, \quad a_\varkappa \equiv (a_{ij}^{(\varkappa)} a_{ij}^{(\varkappa)})^{1/2} \quad (\varkappa = 1, \ldots, m; \; m < n), \tag{2.34}$$

где $a_{ij}^{\varkappa}$ — компоненты тензора $\underset{\sim}{a}^{(\varkappa)}$, инвариантного относительно группы G, причем всегда можно их выбрать так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{a_{ij}^{(\varkappa)} a_{ij}^{(\rho)}}{a_\varkappa a_\rho} = \delta_{\varkappa\rho}; \quad \sum_{\varkappa=1}^{m} a_{ij}^{(\varkappa)} = \delta_{ij}. \tag{2.35}$$

Итак, разложение произвольного симметричного тензора второго ранга $\underset{\sim}{b}$ на взаимно ортогональные тензоры, принадлежащие инвариантным подпространствам относительно подгруппы G полной ортогональной группы I, имеет вид

$$b_{ij} = \sum_{\varkappa=1}^{m} I_\varkappa \frac{a_{ij}^{(\varkappa)}}{a_\varkappa} + \sum_{\gamma=m+1}^{n} p_{ij}^{(\gamma)}. \tag{2.36}$$

Если подгруппой G является сама группа I, то, как следует из (2.23),

$$n=2,\ m=1,\ a_{ij}^{(1)}=\delta_{ij},\ a_1=\sqrt{3},\ I_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\langle \underset{\sim}{b}\rangle,$$

$$I_2=b_{\text{и}}=\sqrt{\bar{b}_{ij}\bar{b}_{ij}},\ p_{ij}^{(1)}=\frac{1}{3}\langle \underset{\sim}{b}\rangle\delta_{ij},\ p_{ij}^{(2)}=\bar{b}_{ij}. \quad (2.37)$$

Упражнение 2.7. Показать, что если подгруппа G является группой трансверсальной изотропии T_3, то в (2.36) можно положить $n=4$, $m=2$:

$$a_{ij}^{(1)}=\delta_{i1}\delta_{j1}+\delta_{i2}\delta_{j2},\ a_1=\sqrt{2},\ a_{ij}^{(2)}=\delta_{i3}\delta_{j3},\ a_2=1, \quad (2.38)$$

$$I_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(b_{11}+b_{22}),\ I_2=b_{33},$$

$$I_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(b_{11}-b_{22})^2+4b_{12}^2},\ I_4=\sqrt{2(b_{13}^2+b_{23}^2)}, \quad (2.39)$$

$$p_{ij}^{(1)}=\frac{1}{2}(b_{11}+b_{22})(\delta_{i1}\delta_{j1}+\delta_{i2}\delta_{j2}),\ p_{ij}^{(2)}=b_{33}\delta_{i3}\delta_{j3},$$

$$p_{ij}^{(3)}=b_{ij}-\frac{1}{2}(b_{11}+b_{22})(\delta_{i1}\delta_{j1}+\delta_{i2}\delta_{j2})+b_{33}\delta_{i3}\delta_{j3}-$$

$$-b_{i3}\delta_{j3}-b_{j3}\delta_{i3},\ p_{ij}^{(4)}=b_{i3}\delta_{j3}+b_{j3}\delta_{i3}-2b_{33}\delta_{i3}\delta_{j3}. \quad (2.40)$$

Упражнение 2.8. Показать, что если подгруппой G является группа ортотропии O, то в (2.36) можно положить $n=6$, $m=3$:

$$a_{ij}^{(\varkappa)}=\delta_{i\varkappa}\delta_{j\varkappa},\ a_\varkappa=1\ (\varkappa=1,2,3), \quad (2.41)$$

$$I_\varkappa=b_{\varkappa\varkappa}\ (\varkappa=1,2,3),\ I_4=\sqrt{2}|b_{23}|,\ I_5=\sqrt{2}|b_{13}|,\ I_6=$$
$$=\sqrt{2}|b_{12}|, \quad (2.42)$$

$$p_{ij}^{(\varkappa)}=b_{\varkappa\varkappa}\delta_{i\varkappa}\delta_{j\varkappa}\ (\varkappa=1,2,3),\ p_{ij}^{(6)}=b_{12}(\delta_{1i}\delta_{2j}+\delta_{2i}\delta_{1j}),$$

$$p_{ij}^{(5)}=b_{13}(\delta_{1i}\delta_{3j}+\delta_{3i}\delta_{1j}),\ p_{ij}^{(4)}=b_{23}(\delta_{2i}\delta_{3j}+\delta_{3i}\delta_{2j}). \quad (2.43)$$

Упражнение 2.9. Показать, что тензоры (2.38) $\underset{\sim}{a}^{(\varkappa)}$, $\varkappa=1, 2$, инвариантные относительно группы трансверсальной изотропии T_3, могут быть выбраны с точностью до одного параметра φ, если выбрать их компоненты в виде

$$a_{ij}^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi\\ 0 & -\sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi\end{pmatrix},$$

$$\underset{\sim}{a}_{ij}^{(2)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \sin^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi\\ 0 & \sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi\end{pmatrix}. \qquad (2.44)$$

Упражнение 2.10. Показать, что тензоры (2.41) $\underset{\sim}{a}^{(\varkappa)}$, $\varkappa=1, 2, 3$, инвариантные относительно группы ортотропии O, могут быть выбраны с точностью до трех параметров: φ_1, φ_2, θ, если выбрать их компоненты в виде

$$a_{ij}^{(\varkappa)}=\begin{pmatrix}g_{\varkappa 1}^2 & g_{\varkappa 1}g_{\varkappa 2} & g_{\varkappa 1}g_{\varkappa 3}\\ g_{\varkappa 1}g_{\varkappa 2} & g_{\varkappa 2}^2 & g_{\varkappa 2}g_{\varkappa 3}\\ g_{\varkappa 1}g_{\varkappa 3} & g_{\varkappa 2}g_{\varkappa 3} & g_{\varkappa 3}^2\end{pmatrix} \quad (\varkappa=1, 2, 3), \qquad (2.45)$$

где величины $g_{\varkappa 1}$, $g_{\varkappa 2}$, $g_{\varkappa 3}$ $(\varkappa=1, 2, 3)$ определены формулой (6.52) гл. 1.

Упражнение 2.11. Показать, что тензоры (2.44) и (2.45) удовлетворяют условиям (2.35). ●

Мы всюду выбирали ось трансверсальной изотропии, совпадающей с координатной осью x_3 прямоугольной системы координат. Однако можно ее выбрать произвольно ориентированной в пространстве и характеризующейся единичным вектором $\vec{c}$. Более того, этот вектор $\vec{c}$ может зависеть от координат. В таком случае трансверсальная изотропия называется *криволинейной* и образующие тензоры группы трансверсальной изотропии вместо (2.14) можно выбрать в виде

$$\underset{\sim}{g}\,(g_{ij}), \quad \vec{c}=c^i\vec{e}_i\,(g_{ij}c^ic^j=1). \qquad (2.46)$$

Упражнение 2.12. Показать, что для *криволинейной трансверсальной изотропии* можно положить вместо (2.38) — (2.40):

$$a_{ij}^{(1)}=g_{ij}-c_ic_j,\ a_1=\sqrt{2},\ a_{ij}^{(2)}=c_ic_j,\ a_2=1, \qquad (2.47)$$

$$I_1=\frac{\sqrt{2}}{2}b_{ij}(g^{ij}-c^ic^j),\ I_2=b_{ij}c^ic^j,$$

$$I_3=[b_{ij}b^{ij}-(b_{ij}g^{ij})^2+\frac{1}{2}(I_2+b_{ij}g^{ij})^2-2c^ib_{i\cdot}^{\cdot k}b_{kj}c^j]^{1/2},$$

$$I_4=[2(c^ib_{i\cdot}^{\cdot k}b_{kj}c^j-I_2^2)]^{1/2}, \qquad (2.48)$$

$$p_{ij}^{(1)}=\frac{1}{2}b_{kl}(g^{kl}-c^kc^l)(g_{ij}-c_ic_j),\quad p_{ij}^{(2)}=b_{kl}c^kc^lc_ic_j,$$

$$p_{ij}^{(3)}=b_{ij}-\frac{\sqrt{2}}{2}I_1(g_{ij}-c_ic_j)+I_2c_ic_j-c^k(b_{ki}c_j+b_{kj}c_i), \qquad (2.49)$$

$$p_{ij}^{(4)}=c^k(b_{ki}c_j+b_{kj}c_i)-2I_2c_ic_j. \bullet$$

Точно так же для криволинейной ортотропии можно выбрать три единичных вектора $\vec{c}^{(\varkappa)}$, $\varkappa=1, 2, 3$, зависящих от координат и характеризующих три главных направления ортотропии в каждой точке пространства, причем

$$g^{ij}c_i^{(\varkappa)}c_j^{(\rho)}=\delta_{\varkappa\rho}\quad(\varkappa,\ \rho=1,\ 2,\ 3). \qquad (2.50)$$

Упражнение 2.13. Доказать, исходя из (2.50), что для матрицы, составленной из образующих векторов $\vec{c}^{(\varkappa)}$ ($\varkappa=1, 2, 3$) ортотропии в прямоугольной декартовой системе координат

$$\begin{pmatrix} c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & c_3^{(1)} \\ c_1^{(2)} & c_2^{(2)} & c_3^{(2)} \\ c_1^{(3)} & c_2^{(3)} & c_3^{(3)} \end{pmatrix} \qquad (2.51)$$

следует, что:

а) сумма квадратов элементов одной строки или столбца (2.51) равна 1;

б) сумма произведений соответствующих элементов двух строк или двух столбцов (2.51) равна нулю.

Упражнение 2.14. Показать, что для криволинейной ортотропии можно положить вместо (2.41)—(2.43)

$$a_{ij}^{(\varkappa)}=c_i^{(\varkappa)}c_j^{(\varkappa)},\quad a_\varkappa=1\quad(\varkappa=1,\ 2,\ 3), \qquad (2.52)$$

$$I_\varkappa=b^{ij}c_i^{(\varkappa)}c_j^{(\varkappa)},\quad I_{\varkappa+3}=\sqrt{V_iV^i-2V_\varkappa^2},$$

$$V_\varkappa^2\equiv c_i^{(\varkappa)}b_{\cdot k}^{i\cdot}b^{kj}c_j^{(\varkappa)}-I_\varkappa^2\quad(\varkappa=1,\ 2,\ 3), \qquad (2.53)$$

$$p_{ij}^{(\varkappa)}=I_\varkappa a_{ij}^{(\varkappa)},\quad p_{ij}^{(\varkappa+3)}=\sum_{\gamma=1}^{3}V_{ij}^{(\gamma)}-2V_{ij}^{(\varkappa)},$$

$$V_{ij}^{(\varkappa)} = \frac{1}{2}\left(c_i^{(\varkappa)} b_{j\cdot}^{\cdot k} + c_j^{(\varkappa)} b_{i\cdot}^{\cdot k}\right) c_k^{(\varkappa)} - I_\varkappa c_i^{(\varkappa)} c_j^{(\varkappa)} \quad (\varkappa = 1, 2, 3). \tag{2.54}$$

§ 3. Независимые инварианты тензора

В § 3 гл. 1 было показано, что инвариант (скалярный инвариант) относительно одной группы G_1 может не являться инвариантом относительно другой G_2. Очевидно, однако, что если группа G_2 является подгруппой группы G_1, то инвариант относительно группы G_1 является одновременно и инвариантом группы G_2 (но не наоборот). Поэтому если имеется последовательность групп $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$, такая, что каждая G_{n+1} является подгруппой группы G_n

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq G_3 \supseteq \ldots \supseteq G_n \supseteq \ldots, \tag{3.1}$$

то с возрастанием номера n число инвариантов относительно группы G_n, вообще говоря, возрастает.

В § 3 гл. 1 было показано, например, что вектор (тензор первого ранга) имеет один инвариант относительно полной ортогональной группы I в R_3, два инварианта относительно трансверсально изотропной группы T_3 и три относительно ортотропной группы O.

В § 3 гл. 3 было подчеркнуто, что симметричный тензор второго ранга имеет три независимых инварианта, ибо след всякой степени n ($n>3$) такого тензора

$$\langle \underset{\sim}{b}^n \rangle = b_{i_1\cdot}^{\cdot i_2} b_{i_2\cdot}^{\cdot i_3} \ldots b_{i_{n-1}}^{\cdot i_n} b_{i_n}^{\cdot i_1} \tag{3.2}$$

согласно формуле Гамильтона — Кели (см. (3.12) гл. 3) выражается через следы первых трех степеней тензора.

Однако сама формула Гамильтона — Кели справедлива не только для симметричного тензора. Так может быть и несимметричный тензор второго ранга имеет три независимых инварианта относительно общей группы преобразований? Для того чтобы разобраться в этом вопросе, посмотрим, какими способами формируются инварианты тензора. Для симметричного тензора второго ранга, кроме инвариантов типа (3.2), могут быть образованы также инварианты с помощью тензоров Леви-Чивиты (см. упр. 2.7