$$V_{ij}^{(\varkappa)} = \frac{1}{2}\left(c_i^{(\varkappa)} b_{j\cdot}^{\cdot k} + c_j^{(\varkappa)} b_{i\cdot}^{\cdot k}\right) c_k^{(\varkappa)} - I_\varkappa c_i^{(\varkappa)} c_j^{(\varkappa)} \quad (\varkappa = 1, 2, 3). \tag{2.54}$$

§ 3. Независимые инварианты тензора

В § 3 гл. 1 было показано, что инвариант (скалярный инвариант) относительно одной группы G_1 может не являться инвариантом относительно другой G_2. Очевидно, однако, что если группа G_2 является подгруппой группы G_1, то инвариант относительно группы G_1 является одновременно и инвариантом группы G_2 (но не наоборот). Поэтому если имеется последовательность групп $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$, такая, что каждая G_{n+1} является подгруппой группы G_n

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq G_3 \supseteq \ldots \supseteq G_n \supseteq \ldots, \tag{3.1}$$

то с возрастанием номера n число инвариантов относительно группы G_n, вообще говоря, возрастает.

В § 3 гл. 1 было показано, например, что вектор (тензор первого ранга) имеет один инвариант относительно полной ортогональной группы I в R_3, два инварианта относительно трансверсально изотропной группы T_3 и три относительно ортотропной группы O.

В § 3 гл. 3 было подчеркнуто, что симметричный тензор второго ранга имеет три независимых инварианта, ибо след всякой степени n ($n>3$) такого тензора

$$\langle \underset{\sim}{b}^n \rangle = b_{i_1\cdot}^{\cdot i_2} b_{i_2\cdot}^{\cdot i_3} \ldots b_{i_{n-1}}^{\cdot i_n} b_{i_n}^{\cdot i_1} \tag{3.2}$$

согласно формуле Гамильтона — Кели (см. (3.12) гл. 3) выражается через следы первых трех степеней тензора.

Однако сама формула Гамильтона — Кели справедлива не только для симметричного тензора. Так может быть и несимметричный тензор второго ранга имеет три независимых инварианта относительно общей группы преобразований? Для того чтобы разобраться в этом вопросе, посмотрим, какими способами формируются инварианты тензора. Для симметричного тензора второго ранга, кроме инвариантов типа (3.2), могут быть образованы также инварианты с помощью тензоров Леви-Чивиты (см. упр. 2.7

гл. 3). Например, таким инвариантом является определитель тензора $\underset{\sim}{b}$ (см. (2.2) гл. 3). Для несимметричного тензора второго ранга $\underset{\sim}{c}$ число возможностей построения его инвариантов повышается. Ведь всякий несимметричный тензор второго ранга $\underset{\sim}{c}$ может быть представлен в виде суммы симметричного $\underset{\sim}{b}$ и антисимметричного $\underset{\sim}{\omega}$ (упр. 1.5 гл. 3):

$$\underset{\sim}{c}=\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{\omega};\ \underset{\sim}{b}\equiv\frac{1}{2}(\underset{\sim}{c}+\underset{\sim}{\tilde{c}}),\ \underset{\sim}{\omega}\equiv\frac{1}{2}(\underset{\sim}{c}-\underset{\sim}{\tilde{c}}), \tag{3.3}$$

причем со всяким антисимметричным тензором $\underset{\sim}{\omega}$ можно однозначно связать аксиальный вектор $\vec{\omega}$ (см. (2.35) гл. 3).

Упражнение 3.1. Доказать, что всякая четная степень антисимметричного тензора является симметричным тензором, а нечетная степень — антисимметричным. ●

Следовательно, инварианты несимметричного тензора можно образовать с помощью следов произведений (и сверткой с тензором Леви-Чивиты) различных степеней симметричной части этого тензора и четных степеней несимметричной его части.

Возможности получения новых инвариантов тензоров увеличиваются, если рассматривать подгруппы G полной ортогональной группы I евклидового пространства R_3. В этом случае можно образовать инварианты путем сверток различных их степеней с тензорами, образующими G (базисными тензорами).

В § 2 мы ввели понятие линейных инвариантов симметричного тензора второго ранга $\underset{\sim}{b}$. Эти инварианты как раз и строятся с помощью свертки тензора $\underset{\sim}{b}$ с тензорами второго ранга, составленными из тензоров, образующих группу G.

Упражнение 3.2. Доказать, что для симметричного тензора второго ранга $\underset{\sim}{b}$ линейный инвариант относительно группы I всего один и имеет вид

$$I_1=\underset{\sim}{b}:\underset{\sim}{\mathcal{I}}=b_{ij}\delta_{ij}\doteq\langle\underset{\sim}{b}\rangle. \tag{3.4}$$

Упражнение 3.3. Доказать, что тензор $\underset{\sim}{b}$ имеет два линейных инварианта относительно группы T_3:

$$I_1=b_{ij}(\delta_{i1}\delta_{j1}+\delta_{i2}\delta_{j2})=b_{11}+b_{22},$$

$$I_2 = b_{ij}\delta_{i3}\delta_{j3} = b_{33}. \qquad (3.5)$$

Упражнение 3.4. Доказать, что тензор $\underset{\sim}{b}$ имеет три линейных инварианта относительно группы O:

$$I_\varkappa = b_{ij}\delta_{i\varkappa}\delta_{j\varkappa} = b_{\varkappa\varkappa} \quad (\varkappa = 1,\ 2,\ 3). \ \bullet \qquad (3.6)$$

Вообще говоря, каждый тензор имеет бесконечное число инвариантов относительно группы G. Однако между этими инвариантами могут существовать всякого рода зависимости. Одним из видов таких зависимостей является алгебраическая. Примером алгебраической зависимости служит уже упомянутое следствие теоремы Гамильтона — Кели, согласно которому среди следов произвольной степени тензора второго ранга (3.2) независимыми могут быть только три, все остальные через них выражаются. Между инвариантами могут существовать и неалгебраические зависимости или полиномиальные соотношения, которые не сводятся к полиномиальной зависимости какого-либо из инвариантов от остальных инвариантов (такие соотношения называются *сизигиями*).

При исследовании тензорных функций большое значение имеют *функциональные зависимости* между инвариантами (если их рассматривать как функции от компонент тензоров, из которых эти инварианты образованы). При этом важно установить *функционально независимые инварианты*. Рассмотрим, например, симметричный тензор второго ранга $\underset{\sim}{b}$. В каждой системе координат он имеет шесть независимых компонент, а так как мы рассматриваем евклидово пространство R_3, то в качестве системы координат всегда можно выбрать прямоугольную декартову. Согласно известной теореме алгебры можно выбрать такую прямоугольную систему координат, в которой тензор $\underset{\sim}{b}$ будет представляться диагональной матрицей. Следовательно, всякий инвариант тензора $\underset{\sim}{b}$ будет зависеть не более чем от трех компонент b_{11}, b_{22}, b_{33} (более подробно этот вопрос будет изучен в следующем параграфе). Поэтому функционально независимых инвариантов симметричного тензора $\underset{\sim}{b}$ будет не более трех.

Если же мы рассматриваем инварианты относительно группы G, являющейся подгруппой полной ортогональной группы I, то допустимыми будут не все ортогональные преобразования и поэтому не всякую симметричную матрицу с помощью таких преобразований можно привести к диагональному виду. Поэтому число функционально независимых инвариантов тензора $\underset{\sim}{b}$ относительно групиы G может повыситься. Однако в любом случае их не может быть более шести, ибо в любой системе координат симметричный тензор $\underset{\sim}{b}$ имеет не более шести независимых компонент, которые можно считать аргументами инвариантов, рассматриваемых как функции.

Очевидно также, что функционально независимых инвариантов относительно группы I для несимметричного тензора $\underset{\sim}{c}$ будет не более шести. В самом деле, представляя тензор $\underset{\sim}{c}$ в виде (3.3), т. е. суммы симметричного $\underset{\sim}{b}$ и антисимметричного $\underset{\sim}{\omega}$ тензоров и приводя ортогональным невырожденным преобразованием тензор $\underset{\sim}{b}$ к диагональному виду, мы будем в некоторой специальной системе координат иметь не более трех независимых компонент тензора $\underset{\sim}{b}$ и трех независимых компонент тензора $\underset{\sim}{\omega}$. Поэтому все инварианты тензора $\underset{\sim}{c}$ можно рассматривать как функцин не более чем шести аргументов, а значит, и число функционально независимых инвариантов тензора $\underset{\sim}{c}$ не более шести.

Обратимся теперь к p-представлению симметричного тензора второго ранга $\underset{\sim}{b}$ (2.30). Очевидно, что каждый нз тензоров $\underset{\sim}{p}^{(\alpha)}$, составляющих это представление, линейно зависит от компонент тензора $\underset{\sim}{b}$. Поэтому инвариант

$$I_\alpha^2 = p_{ij}^{(\alpha)} p_{ij}^{(\alpha)} \tag{3.7}$$

завнсит квадратично от компонент тензора $\underset{\sim}{b}$.

Эти соображения помогают отыскать независимые инварианты относительно группы G тензора $\underset{\sim}{b}$. Построим всевозможные инварианты путем сверток различных степеней тензора $\underset{\sim}{b}$ и образующих тензоров группы G. Оставим среди этнх инварнантов только линейные (определение линейных инвариантов дано в § 2) и *квадратичные* (3.7). Если число таких инвариантов n не превышает шести, то это и независимые инварианты. В противном случае, среди них следует выбрать шесть функционально независимых инвариантов.

Упражнение 3.5. Показать, что для симметричного тензора $\underset{\sim}{b}$ с помощью образующего тензора группы I (2.16) можно построить только один линейный ($m=1$) и один квадратичный инвариант ($n=2$), см. (2.37)

$$I_1' = b_{ij}\delta_{ij} = \langle \underset{\sim}{b} \rangle = \sqrt{3}\, I_1,\ I_2'^2 \equiv b_{ik}b_{kj}\delta_{ij} = b_{ij}b_{ij} = I_1^2 + I_2^2. \tag{3.8}$$

Упражнение 3.6. Показать, что для симметричного тензора $\underset{\sim}{b}$ с помощью образующих тензоров группы T_3 (2.15) можно построить только два линейных ($m=2$) и два квадратичных инварианта ($n=4$), см. (2.39)

$$\begin{gathered} I_1' = b_{ij}(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}) = b_{11} + b_{22} \equiv \sqrt{2}\, I_1, \\ I_2 = b_{ij}\delta_{3i}\delta_{3j} = b_{33},\ I_3'^2 = b_{ik}b_{kj}(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}) = \\ = b_{1k}b_{k1} + b_{2k}b_{k2} \equiv I_1^2 + I_3^2 + \frac{1}{2} I_4^2, \\ I_4'^2 = b_{ik}b_{kj}\delta_{3i}\delta_{3j} = b_{3k}b_{k3} \equiv I_2^2 + \frac{1}{2} I_4^2. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Или для криволинейной трансверсальной изотропии (2.48):

$$\begin{gathered} I_1' = b^{ij}a_{ij}^{(1)} = \sqrt{2}\, I_1,\ I_2 = b^{ij}a_{ij}^{(2)}, \\ I_3'^2 = b^{i}_{\cdot k}b^{kj}a_{ij}^{(1)} = I_1^2 + I_3^2 + \frac{1}{2} I_4^2, \\ I_4'^2 = b^{i}_{\cdot k}b^{kj}a_{ij}^{(2)} = I_2^2 + \frac{1}{2} I_4^2. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Упражнение 3.7. Показать, что для симметричного тензора $\underset{\sim}{b}$ с помощью образующих тензоров группы O (2.11) можно построить только три линейных ($m=3$) и три квадратичных инварианта ($n=6$), см. (2.42):

$$\begin{gathered} I_\varkappa = b_{ij}\delta_{i\varkappa}\delta_{j\varkappa} = b_{\varkappa\varkappa}, \\ I_{\varkappa+3}'^2 = b_{ik}b_{kj}\delta_{i\varkappa}\delta_{j\varkappa} = b_{\varkappa k}b_{k\varkappa}\ (\varkappa = 1, 2, 3), \end{gathered} \tag{3.11}$$

$$I'^{2} = I_1^2 + I_4^2 + I_5^2, \quad I_5'^{2} = I_2^2 + I_4^2 + I_6^2,$$
$$I_6'^{2} = I_3^2 + I_5^2 + I_6^2.$$

Или для криволинейной ортотропии (2.53):

$$I_\varkappa = b^{ij} a_{ij}^{(\varkappa)}, \quad I'_{\varkappa+3} = b^{i}_{\cdot k} b^{kj} a_{ij}^{(\varkappa)} \equiv V_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, 3). \quad (3.12)$$

§ 4. Матричные функции

В механике очень часто встречается ситуация, когда один тензор является функцией другого (а иногда даже оператором). При этом в основном рассматриваются тензоры второго ранга. Итак, пусть в каждой точке евклидова пространства $\mathscr{R}_3$ каждому тензору второго ранга $\underset{\sim}{a}$ ставится в соответствие некоторый тензор второго ранга $\underset{\sim}{b}$

$$\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}), \quad (4.1)$$

причем закон соответствия (4.1) называется *тензорной функцией*.

Ясно, что такое определение почти ничего не дает, так как не определяет свойств тензорной функции $\underset{\sim}{f}$. Эта функция может быть тензором второго ранга, образованным из различных тензорных степеней тензора $\underset{\sim}{a}$, может быть тензором более высокого ранга, который свертывается с тензорными степенями тензора $\underset{\sim}{a}$, образуя тензор второго ранга.

Для некоторых случаев понятие тензорной функции $\underset{\sim}{f}$ вводится естественным образом. Так, если под $\underset{\sim}{f}$ понимается полиномиальная функция n-го порядка, то

$$\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}) = \alpha_0 \underset{\sim}{\mathscr{I}} + \alpha_1 \underset{\sim}{a} + \alpha_2 \underset{\sim}{a}^2 + \ldots + \alpha_n \underset{\sim}{a}^n, \quad (4.2)$$

где каждое слагаемое в (4.2) имеет очевидный смысл, а α_i $(i = 0, \ldots, n)$ — некоторые скаляры.

Чаще всего в механике рассматриваются тензорные функции симметричного тензора $\underset{\sim}{a}$, инвариантные относительно какой-либо группы преобразования, связанной, например, с материальной симметрией. Пусть некоторая группа преобразования G характеризуется в некоторой точке $\mathscr{R}_3$ матрицей Q. В системе координат с базисом $\vec{e}_i$