$$I'^{2} = I_1^2 + I_4^2 + I_5^2, \quad I_5'^{2} = I_2^2 + I_4^2 + I_6^2,$$

$$I_6'^{2} = I_3^2 + I_5^2 + I_6^2.$$

Или для криволинейной ортотропии (2.53):

$$I_\varkappa = b^{ij} a_{ij}^{(\varkappa)}, \quad I'_{\varkappa+3} = b^{i}_{\cdot k} b^{kj} a_{ij}^{(\varkappa)} \equiv V_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, 3). \tag{3.12}$$

## § 4. Матричные функции

В механике очень часто встречается ситуация, когда один тензор является функцией другого (а иногда даже оператором). При этом в основном рассматриваются тензоры второго ранга. Итак, пусть в каждой точке евклидова пространства $\mathcal{R}_3$ каждому тензору второго ранга $\underset{\sim}{a}$ ставится в соответствие некоторый тензор второго ранга $\underset{\sim}{b}$

$$\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}), \tag{4.1}$$

причем закон соответствия (4.1) называется *тензорной функцией.*

Ясно, что такое определение почти ничего не дает, так как не определяет свойств тензорной функции $\underset{\sim}{f}$. Эта функция может быть тензором второго ранга, образованным из различных тензорных степеней тензора $\underset{\sim}{a}$, может быть тензором более высокого ранга, который свертывается с тензорными степенями тензора $\underset{\sim}{a}$, образуя тензор второго ранга.

Для некоторых случаев понятие тензорной функции $\underset{\sim}{f}$ вводится естественным образом. Так, если под $\underset{\sim}{f}$ понимается полиномиальная функция $n$-го порядка, то

$$\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}) = \alpha_0 \underset{\sim}{\mathcal{I}} + \alpha_1 \underset{\sim}{a} + \alpha_2 \underset{\sim}{a}^2 + \ldots + \alpha_n \underset{\sim}{a}^n, \tag{4.2}$$

где каждое слагаемое в (4.2) имеет очевидный смысл, а $\alpha_i$ ($i = 0, \ldots, n$) — некоторые скаляры.

Чаще всего в механике рассматриваются тензорные функции симметричного тензора $\underset{\sim}{a}$, инвариантные относительно какой-либо группы преобразования, связанной, например, с материальной симметрией. Пусть некоторая группа преобразования $G$ характеризуется в некоторой точке $\mathcal{R}_3$ матрицей $Q$. В системе координат с базисом $\vec{e}_i$

$$\underset{\sim}{b} = b_j^i \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j, \quad \underset{\sim}{a} = a_j^i \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j. \tag{4.3}$$

Поэтому соотношение (4.1) можно записать в виде

$$b_j^i = f_j^i (a_l^k). \tag{4.4}$$

Тогда при переходе к другой системе координат преобразованием, определяющим группу $G$,

$$\vec{e}_{i'} = Q_{i'}^i \vec{e}_i, \tag{4.5}$$

для тензорной функции $f$, инвариантной относительно группы преобразования $G$ и характеризующейся матрицей $Q$, можно записать в матричном виде выражение

$$Q^{-1} b Q = f(Q^{-1} a Q). \tag{4.6}$$

Если под $G$ понимается полная ортогональная группа евклидова пространства $\mathscr{R}_3$, то тензорная функция $\underset{\sim}{f}$, удовлетворяющая соотношениям (4.1) и (4.6) для всякой ортогональной матрицы $Q$, называется изотропной. Как известно из алгебры, всякая симметричная матрица $a$ путем некоторого невырожденного ортогонального преобразования $Q$ приводится к диагональному виду. Таким образом,

$$Q^{-1} a Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

где $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ — собственные значения (спектр) матрицы $a$.

Можно рассмотреть частный случай изотропной тензорной функции, обычно рассматриваемый в теории матриц [10]:

$$Q^{-1} b Q = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda_3) \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

т. е. с каждой тензорной функцией $f$ можно естественным образом связать скалярную функцию $f(\lambda)$, значения которой на спектре матрицы $a$ определяют матрицу $b$ (4.1) в некоторой специальной системе координат. Так как (4.1) отражает ковариантную зависимость двух тензоров, то, зная эту зависимость в одной системе координат, можно вычислить ее в любой другой.

Пусть скалярная функция $f(\lambda)$ может быть представлена в окрестности некоторой точки $\lambda_0$ степенным рядом

$$f(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i (\lambda-\lambda_0)^i, \tag{4.9}$$

сходящимся в некотором круге сходимости $|\lambda-\lambda_0|<R$. Тогда, очевидно, это разложение сохраняет силу, если скалярный аргумент заменить матрицей $a$, собственные числа которой лежат внутри этого круга сходимости. Тем самым определяются тензорные функции

$$e^{\underset{\sim}{a}}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\underset{\sim}{a}^i}{i!}, \tag{4.10}$$

$$\cos\underset{\sim}{a}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2!)!}\underset{\sim}{a}^{2i}, \quad \sin\underset{\sim}{a}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\underset{\sim}{a}^{2i+1}, \tag{4.11}$$

$$(\underset{\sim}{\mathcal{I}}-\underset{\sim}{a})^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}\underset{\sim}{a}^i, \tag{4.12}$$

$$\ln\underset{\sim}{a}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i}(\underset{\sim}{a}-\underset{\sim}{\mathcal{I}})^i \text{ и т. д.}, \tag{4.13}$$

причем на главные значения тензоров $\underset{\sim}{a}$ в (4.10) и (4.11) не накладывается ограничений, для (4.12) предполагается выполненным условие $|\lambda_j|<1$, а для (4.13) — $|\lambda_j-1|<1$ ($j=1, 2, 3$). Разумеется, правые части выражений (4.2), (4.10)—(4.13) можно с помощью формулы Гамильтона — Кели (3.12) гл. 3 свернуть так, чтобы тензор $\underset{\sim}{b}$ выражался через степени тензора $\underset{\sim}{a}$ не выше второй:

$$\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{f}(a)\equiv\beta_0\underset{\sim}{I}+\beta_1\underset{\sim}{a}+\beta_2\underset{\sim}{a}^2, \tag{4.14}$$

где функции $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$ являются соответствующими скалярными функциями трех независимых инвариантов тензора $\underset{\sim}{a}$.

Для того чтобы построить явную зависимость этих функций от инвариантов, воспользуемся тем обстоятельством, что матрица $b$, выражающая тензор $\underset{\sim}{b}$ в некоторой системе координат, полностью определяется по значениям функции $f$ на спектре матрицы $a$. Следовательно, нужно отыскать скалярную функцию $f$, приннмающую в трех точках $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ спектра матрицы $a$ заданные значения $f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$, $f(\lambda_3)$.

Предположим вначале, что все значения $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ различны между собой и отличны от нуля. Полином

$$P(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2, \tag{4.15}$$

принимающий заданные значения в точках $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, называется интерполяционным полиномом Лагранжа. Для отыскания коэффициентов этого полинома $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ нужно решить алгебраическую систему уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_0+\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_1{}^2&=f(\lambda_1),\\ \alpha_0+\alpha_1\lambda_2+\alpha_2\lambda_2{}^2&=f(\lambda_2),\\ \alpha_0+\alpha_1\lambda_3+\alpha_2\lambda_3{}^2&=f(\lambda_3). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Определитель этой системы является определителем Вандермонда

$$d=(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1), \tag{4.17}$$

который в силу сделанных предположений отличен от нуля. Решение системы (4.16) имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_0&=\frac{1}{d}[f(\lambda_1)\lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2)-f(\lambda_2)\lambda_1\lambda_3(\lambda_3-\lambda_1)+\\ &\quad+f(\lambda_3)\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)],\\ \alpha_1&=\frac{1}{d}[-f(\lambda_1)(\lambda_3^2-\lambda_2^2)+f(\lambda_2)(\lambda_3^2-\lambda_1^2)-\\ &\quad-f(\lambda_3)(\lambda_2^2-\lambda_1^2)],\\ \alpha_2&=\frac{1}{d}[f(\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)-f(\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)+f(\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)]. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Подставляя (4.18) в (4.15), получим искомый полином

$$P(\lambda)=f(\lambda_1)\frac{(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}+$$

$$+f(\lambda_2)\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_3)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}+f(\lambda_3)\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_2)}. \quad (4.19)$$

Так как функция $f(\lambda)$ и полином $P(\lambda)$ совпадают на спектре матрицы $a$, то

$$\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a})\equiv\frac{(\underset{\sim}{a}-\lambda_2\underset{\sim}{\mathscr{I}})(\underset{\sim}{a}-\lambda_3\underset{\sim}{\mathscr{I}})}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}f(\lambda_1)+$$
$$+\frac{(\underset{\sim}{a}-\lambda_1\underset{\sim}{\mathscr{I}})(\underset{\sim}{a}-\lambda_3\underset{\sim}{\mathscr{I}})}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}f(\lambda_2)+$$
$$+\frac{(\underset{\sim}{a}-\lambda_1\underset{\sim}{\mathscr{I}})(\underset{\sim}{a}-\lambda_2\underset{\sim}{\mathscr{I}})}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}f(\lambda_3). \quad (4.20)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3&=\langle a\rangle\equiv I,\\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2&=\langle a^2\rangle\equiv II,\\ \lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3&=\langle a^3\rangle\equiv III,\end{aligned} \quad (4.21)$$

и разрешая (4.21) относительно инвариантов $I$, $II$, $III$, а затем подставляя в (4.20), получим (4.14) и явное выражение скалярных функций $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$ от инвариантов $I$, $II$, $III$.

Если теперь $\lambda_2=\lambda_3$, но $\lambda_1\neq\lambda_2$, то получим соотношения (4.1), совершая в (4.20) предельный переход

$$f'(\lambda_2)=\lim_{\lambda_3\to\lambda_2}\frac{f(\lambda_2)-f(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}, \quad (4.22)$$

т. е. в этом случае для непрерывности тензорной функции $\underset{\sim}{f}$ необходимо потребовать дифференцируемости соответствующей ей скалярной функции $f$, точно так же для случая $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ нужно потребовать существования (и ограниченности) второй производной

$$|f'(\lambda_1)|<\infty, \quad |f''(\lambda_1)|<\infty. \quad (4.23)$$

**Упражнение 4.1.** Доказать, что при $\lambda_2=\lambda_3$ справедлива формула

$$\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a})=\frac{\underset{\sim}{a}-\lambda_2\underset{\sim}{\mathscr{I}}}{\lambda_1-\lambda_2}f(\lambda_1)-\frac{\underset{\sim}{a}-\lambda_1\underset{\sim}{\mathscr{I}}}{\lambda_1-\lambda_2}f(\lambda_2). \quad (4.24)$$

**Упражнение 4.2.** Доказать, что при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ тензор $\underset{\sim}{b}$ является шаровым:

$$\underset{\sim}{b}=f(\lambda_1)\underset{\sim}{\mathcal{I}}. \tag{4.25}$$

**Упражнение 4.3.** Какие условия требуется наложить, чтобы последовательность матриц

$$b_{(n)}=b_{(n-1)}+\frac{1}{2}\left(a-b^2_{(n-1)}\right),\ n>0,$$

$$b_{(0)}=0 \tag{4.26}$$

сходилась к положительно-определенному квадратному корню из матрицы $a$, т. е.

$$b^2=a. \tag{4.27}$$

**Упражнение 4.4.** Найти все решения уравнения (4.27), имеющие вид

$$b=\varkappa_1\mathcal{I}+\varkappa_2 a, \tag{4.28}$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — некоторые скаляры.

**Упражнение 4.5.** Выразить с помощью формулы (4.14) $a^{-1}$, где $a$ — матрица, соответствующая девиатору некоторого тензора $\underset{\sim}{a}$.

**Упражнение 4.6.** Доказать, что

$$\frac{d}{dt}e^{\underset{\sim}{a}t}=e^{\underset{\sim}{a}t}\otimes\underset{\sim}{a} \tag{4.29}$$

(использовать формулу (4.10)). ●

Следует еще раз отметить, что выведенные формулы справедливы только для симметричного тензора $\underset{\sim}{a}$. В случае, если тензор $\underset{\sim}{a}$ несимметричен, формулу (4.14) необходимо дополнить тензорами, которые образуют линейно независимый базис и среди которых могут встречаться выражения

$$\underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{b}^2,\ \underset{\sim}{c},\ \underset{\sim}{c}^2,\ \underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{c},\ \underset{\sim}{c}\cdot\underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{c}^2,\ \underset{\sim}{c}^2\cdot\underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{b}^2\cdot\underset{\sim}{c},\ \underset{\sim}{c}\cdot\underset{\sim}{b}^2,\ \underset{\sim}{b}^2\cdot\underset{\sim}{c}^2,\ \underset{\sim}{c}^2\cdot\underset{\sim}{b}^2,$$

а в качестве инвариантов, от которых зависят скалярные функции, могут быть выбраны следы следующих тензоров:

$$\underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{b}^2,\ \underset{\sim}{b}^3,\ \underset{\sim}{c}^2,\ \underset{\sim}{c}^2\cdot\underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{c}^2\cdot\underset{\sim}{b}^2,\ \underset{\sim}{c}^2\cdot\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{c}\cdot\underset{\sim}{b}^2, \tag{4.30}$$

где $\underset{\sim}{b}$ — тензор, образованный из $\underset{\sim}{a}$ симметрированием, а $\underset{\sim}{c}$ — образованный из $\underset{\sim}{a}$ антисимметрированием.

**Упражнение 4.7.** Построить вид изотропной тензорной функции от несимметричного тензора 2-го ранга $\underset{\sim}{a}$ [12].

**Упражнение 4.8.** Доказать, что для тензорных функций $\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{\tilde{a}}$, $\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{\tilde{a}}$ невозможно подобрать $\underset{\sim}{f}$ вида (4.14). Найти $f$ для этих случаев. ●

Изотропная тензорная функция $\underset{\sim}{f}$ симметричного тензора $\underset{\sim}{a}$ называется квазилинейной, если в (4.14)

$$\beta_2\equiv 0. \tag{4.31}$$

Легко доказать, что в этом случае скалярные функции $\beta_0$ и $\beta_1$, входящие в (4.14), зависят только от двух инвариантов тензора $\underset{\sim}{a}$. В самом деле, как следует из (4.20), условие (4.31) означает, что

$$\frac{f(\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}=-\frac{f(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}-\\ -\frac{f(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}. \tag{4.32}$$

Подставляя (4.32) в (4.20), получим

$$\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a})=f(\lambda_1)\frac{\underset{\sim}{a}-\lambda_2\underset{\sim}{\mathscr{I}}}{\lambda_1-\lambda_2}-f(\lambda_2)\frac{\underset{\sim}{a}-\lambda_1\underset{\sim}{\mathscr{I}}}{\lambda_1-\lambda_2}. \tag{4.33}$$

**Упражнение 4.9.** Пусть $\underset{\sim}{c}$ — тензор-девиатор, у которого в некоторой системе координат $c_i{}^3=0$ $(i=1, 2, 3)$, и пусть для некоторой функции $f(\lambda)$

$$f(0)=0. \tag{4.34}$$

Доказать, что для того, чтобы изотропная тензорная функция была квазилинейиой, необходимо и достаточно, чтобы она была нечетной, т. е.

$$f(\lambda)=-f(-\lambda). \; ● \tag{4.35}$$

Тензорная функция $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a})$ называется потенциальной, если существует такая скалярная функция $W$ тензора $\underset{\sim}{a}$, что

$$\frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{a}}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}), \tag{4.36}$$

функция $W$ называется в этом случае потенциалом функции $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a})$.

Из определення теизорной изотропной фуикцни, данного выше, следует, что если скалярная функция $f(\lambda)$ интегрируема, то всегда существует потенциал $W$. Если же под функцией $\underset{\sim}{f}$ понимается изотропная функция тензора $\underset{\sim}{a}$ и еще некоторых шаровых тензоров, то такого утверждения сделать, вообще говоря, уже нельзя.

Пусть $W$ зависит от инвариантов симметричного тензора $\underset{\sim}{a}$, т. е. $W\ (\underset{\sim}{I}, \underset{\sim}{II}, \underset{\sim}{III})$. Тогда

$$\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a})=\frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{a}}=\frac{\partial W}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial \underset{\sim}{a}}+\frac{\partial W}{\partial II}\frac{\partial II}{\partial \underset{\sim}{a}}+\frac{\partial W}{\partial III}\frac{\partial III}{\partial \underset{\sim}{a}}. \tag{4.37}$$

Из формул (3.3)—(3.5) гл. 3 и (4.21) следует, что

$$\frac{\partial I}{\partial \underset{\sim}{a}}=\underset{\sim}{\mathcal{J}},\quad \frac{\partial II}{\partial \underset{\sim}{a}}=2\underset{\sim}{a},\quad \frac{\partial III}{\partial \underset{\sim}{a}}=3\underset{\sim}{a}^2. \tag{4.38}$$

Подставляя (4.38) в (4.37), получим

$$\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a})=\frac{\partial W}{\partial I}\underset{\sim}{\mathcal{J}}+2\frac{\partial W}{\partial II}\underset{\sim}{a}+3\frac{\partial W}{\partial III}\underset{\sim}{a}^2. \tag{4.39}$$

Сравнивая (4.39) с (4.14), заключаем, что

$$\beta_0=\frac{\partial W}{\partial I},\quad \beta_1=2\frac{\partial W}{\partial II},\quad \beta_2=3\frac{\partial W}{\partial III}. \tag{4.40}$$

А если $W$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, то

$$\frac{\partial \beta_0}{\partial II}=\frac{\partial \beta_1}{\partial I},\quad \frac{\partial \beta_0}{\partial III}=\frac{\partial \beta_2}{\partial I},\quad \frac{\partial \beta_1}{\partial III}=\frac{\partial \beta_2}{\partial II}. \tag{4.41}$$

Из (4.41) следует, что для квазилинейной тензорной функции (см. (4.31)) функции $W$, $\beta_0$ и $\beta_1$ зависят только от первых двух инвариантов I, II, и, кроме того, выполняются условия взаимности *

$$\frac{\partial \beta_0}{\partial II}=\frac{\partial \beta_1}{\partial I}. \tag{4.42}$$

Аналогично можно рассмотреть изотропные тензорные функции нескольких тензорных аргументов. За

---

* Победря Б. Е. — Механика полимеров, 1967, № 4, с. 645—658.

подробностями мы отсылаем читателя к книге [12]. Здесь же мы приведем без доказательства наиболее общий результат, касающийся ортогональных симметричных тензоров второго ранга, а именно: пусть известно, что тензор $\underset{\sim}{b}$ является изотропной функцией $N$ симметричных тензоров $\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \ldots, \underset{\sim}{a}_N$; $N \geqslant 2$:

$$\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \ldots, a_N). \tag{4.43}$$

Тогда эту фуикцию можно представить в виде

$$\underset{\sim}{b} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{(i)} \underset{\sim}{E}_{(i)}, \quad n \leqslant 6, \tag{4.44}$$

где $\underset{\sim}{E}_{(i)}$ — произвольные линейно независимые тензоры из набора

$$\begin{gathered}
\underset{\sim}{I},\ \underset{\sim}{a}_k,\ a_k^2,\ \underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l + \underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_k, \\
\underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l + \underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_k^2,\ a_k^2 a_l^2 + a_l^2 a_k^2, \\
\underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m + \underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_k,\ a_k^2\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m + \underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_l a_k^2, \\
\underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l^2\underset{\sim}{a}_m + \underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_l^2\underset{\sim}{a}_k,\ \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l^2\underset{\sim}{a}_m + \underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_l^2\underset{\sim}{a}_k^2, \\
\underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_k^2 + \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_k, \\
\underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n + \underset{\sim}{a}_n\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_k,\ \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n + \underset{\sim}{a}_n\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_k^2, \\
\underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l^2\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n + \underset{\sim}{a}_n\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_l^2\underset{\sim}{a}_k,\ \underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n\underset{\sim}{a}_p + \underset{\sim}{a}_p\underset{\sim}{a}_n\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_k,
\end{gathered} \tag{4.45}$$

а коэффициенты $\alpha_{(i)}$ зависят от следов следующих тензоров:

$$\begin{gathered}
\underset{\sim}{a}_k,\ \underset{\sim}{a}_k^2,\ \underset{\sim}{a}_k^3,\ \underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l,\ \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l,\ \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l^2, \\
\underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m,\ \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m,\ \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l^2\underset{\sim}{a}_m,\ \underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n, \\
\underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n,\ \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l^2\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n,\ \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n, \\
\underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n\underset{\sim}{a}_p,\ \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n\underset{\sim}{a}_p,\ \underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n\underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_q,
\end{gathered} \tag{4.46}$$

где числа $k, l, m, n, p, q$ представляют собой всевозможные наборы из $N$, все различные. (Среди инвариантов (4.46), разумеется, нужно выбрать функционально независимые.)

Обобщением тензорных функций являются *тензор-*

*ные операторы,* которые играют важную роль при построении новых моделей механики сплошной среды. Частным случаем таких операторов являются тензорные функции нескольких тензоров, а также неизотропные функции.

В связи с этим введем понятие дифференциала $D\underset{\sim}{f}$ тензора-оператора $\underset{\sim}{\check{f}}$ и его функциональной производной, а именно

$$D\underset{\sim}{\check{f}}\{\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{h}\} \equiv \left[\frac{\partial \underset{\sim}{\check{f}}}{\partial \underset{\sim}{a}} \underset{\sim}{h}\right] = \frac{d}{d\xi} \underset{\sim}{\check{f}}\{\underset{\sim}{a} + \xi \underset{\sim}{h}\}_{\xi=0}. \qquad (4.47)$$

При этом будем считать, что $D\underset{\sim}{\check{f}}$ линеен относительно $\underset{\sim}{h}$. Пусть тензоры второго ранга $\underset{\sim}{h}^{(1)}, \underset{\sim}{h}^{(2)}, \ldots, \underset{\sim}{h}^{(m)}$ принадлежат некоторым линейным нормированным пространствам $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Назовем *т-линейной формой* выражение

$$\underset{\sim}{\check{A}}_m \underset{\sim}{h}^{(1)} \underset{\sim}{h}^{(2)} \ldots \underset{\sim}{h}^{(m)} =$$

$$= A^{iji_1j_1i_2j_2\ldots i_mj_m} h^{(1)}_{i_1j_1} \ldots h^{(m)}_{i_mj_m} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, \qquad (4.48)$$

где $\vec{e}_i$ — векторы репера пространства $\mathscr{R}_3$.

Форма называется однородной, если

$$E_1 = E_2 = \ldots = E_m, \ \underset{\sim}{h}^{(1)} = \underset{\sim}{h}^{(2)} = \ldots = \underset{\sim}{h}^{(n)}.$$

Однородная форма второй степени называется квадратичной. Сумму однородных форм

$$\sum_{m=0}^{M} \underset{\sim}{\check{A}}_m \underbrace{\underset{\sim}{h} \ldots \underset{\sim}{h}}_{m} \equiv \sum_{m=0}^{M} \underset{\sim}{\check{A}}_m \underset{\sim}{h}^m \qquad (4.49)$$

назовем многочленом $M$-степени относительно $\underset{\sim}{h}$.

Пусть теперь оператор $\underset{\sim}{\check{f}}$ в окрестности точки $\underset{\sim}{a} = 0$ представляется в виде ряда, сходящегося внутри некоторого круга сходимости радиуса $R$:

$$\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{\check{f}}(\underset{\sim}{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \check{A}_m \underset{\sim}{h}^m. \qquad (4.50)$$

Очевидно, что характеристические числа матрицы $\underset{\sim}{h}$ должны лежать внутри этого круга сходимости. Величины $\breve{A}_m$, входящие в выражение (4.50), представляют собой тензоры-операторы 2 $(m+1)$-го ранга. Если тензоры $\underset{\sim}{h}$ и $\underset{\sim}{b}$ симметричны, то тензоры $\breve{A}_m^{iji_1j_1\ldots i_mj_m} \vec{e}_i \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{j_m}$ также симметричны по индексам $i$, $j$, $i_k$, $j_k$ $(k=1, \ldots, m)$. Кроме того, они симметричны по парам индексов $i_kj_k$, $i_lj_l$ $(k=1, \ldots, m)$. Если они еще симметричны по парам индексов $ij$ и $i_kj_k$:

$$\breve{A}_m^{iji_1j_1\ldots, i_kj_k\ldots i_mj_m} = \breve{A}_m^{i_kj_ki_1j_1\ldots ij\ldots i_mj_m}, \qquad (4.51)$$

то говорят, что выполнены *условия взаимности*. В соотношениях (4.51) $\partial\breve{f}/\partial a$ представляет собой тензор-оператор четвертого ранга. Можно определить тензорные функциональные производные второго и более высокого порядка.

Заметим, что если оператор $\breve{f}$ представим в окрестности точки $\underset{\sim}{a}$ в виде ряда Тейлора, то под $\breve{A}_m$ в выражении (4.50) понимается $m$-я тензорная функциональная производная в данной точке (которая является тензором 2 $(m+1)$-го ранга), поделенная на $m$! Очевидно, чтобы тензорный оператор $\underset{\sim}{\breve{f}}$, представимый в виде (4.50), был инвариантен относительно группы преобразования $G$, необходимо, чтобы каждая $m$-линейная однородная форма была инвариантна относительно $G$. Если под $\underset{\sim}{\breve{f}}$ понимается функция $\underset{\sim}{f}$, а $G$ является полной ортогональной группой $I$, то, подставляя в (4.50) выражения тензоров $\underset{\sim}{A_m}$ в виде комбинации единичных тензоров, получим (4.2), а после применения формулы Гамильтона — Кели — выражение (4.14).

Оператор $\underset{\sim}{\breve{f}}$ называется квазилинейным, если он является тензорно-линейным, а его нелинейность отражается нелинейной зависимостью от инвариантов тензора-аргумента. Оператор $\underset{\sim}{\breve{f}}$ называется потенциальным, если существует такой скалярный оператор $\underset{\sim}{\breve{W}}$, что

$$\underset{\sim}{b} \equiv \underset{\sim}{\breve{f}}\{\underset{\sim}{a}\} = \frac{\partial \breve{W}}{\partial \underset{\sim}{a}}. \qquad (4.52)$$

Если оператор $\underset{\sim}{\breve{f}}$ аналитический (т. е. существуют все его производные по Фреше), то его всегда можно представить в виде (4.50). Если $\underset{\sim}{f}$ является непрерывным, то его можно аппроксимировать с наперед заданной точностью выражением (4.50) *. Легко видеть, что выполнение условий взаимности (4.51) эквивалентно потенциальности оператора $\underset{\sim}{f}$ (4.52).

**Теорема.** Если оператор $\underset{\sim}{f}$ является квазилинейным и потенциальным (выполнены условия взаимности), то в правую часть выражения (4.50) не могут входить скалярные степени тензора $\underset{\sim}{a}$ выше второй.

Скалярной степенью $m$ симметричного тензора $\underset{\sim}{a}$ называется выражение

$$I_m \equiv a^{i_1}_{i_2}(\lambda_1)\, a^{i_2}_{i_3}(\lambda_3) \ldots a^{i_{m-1}}_{i_m}(\lambda_{m-1})\, a^{i_m}_{i_1}(\lambda_m), \qquad (4.53)$$

а тензорной степенью $m$ этого же тензора — выражение

$$\underset{\sim}{I}_m \equiv a^{i}_{i_2}(\lambda_1)\, a^{i_2}_{i_3}(\lambda_2) \ldots a^{i_{m-1}}_{i_m}(\lambda_{m-1})\, a^{i_m}_{j}(\lambda_m)\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}^{\,j}, \qquad (4.54)$$

где $\lambda_i$ — значения параметра $\lambda \in [l_0, l_1]$. В самом деле, пусть оператор $\underset{\sim}{f}$

$$\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{f}\{\underset{\sim}{a}\} \qquad (4.55)$$

является квазилинейным и потенциальным. Тогда соотношения (4.55) в силу (4.52) можно записать в виде

$$\underset{\sim}{b} = \sum_m \frac{\partial W}{\partial I_m} \frac{\partial I_m}{\partial \underset{\sim}{a}}, \quad \frac{\partial I_m}{\partial \underset{\sim}{a}} = m \underset{\sim}{I}_{m-1}. \qquad (4.56)$$

Так как $\underset{\sim}{b}$ выражается квазилинейно через $\underset{\sim}{a}$, то в разложение (4.56) должны входить только $\underset{\sim}{I}_m$ ($m \leqslant 2$. $\underset{\sim}{I}_0 \equiv \underset{\sim}{\mathcal{I}}$ — единичный тензор). Для этого, как следует из (4.56), нужно потребовать, чтобы

$$\frac{\partial \breve{w}}{\partial I_m} \equiv 0, \quad m > 2, \qquad (4.57)$$

что и требовалось доказать.

**Упражнение 4.10.** Доказать, что справедлива и об-

---

* Frechet M. M. — Ann. L'Ecole Normal Supérieure, 1910, v. 27.

ратная теорема. Если оператор $\underset{\sim}{f}$ допускает разложение (4.46) и квазилинейный, то выполняются условия взаимности и оператор $\underset{\sim}{f}$ является потенциальным.

## § 5. Общее определение тензорной функции

В предыдущем параграфе мы рассмотрели частное определение тензорной функции, основанное на известном определении функции от матриц [2]. Здесь мы рассмотрим общий случай.

Будем говорить, что тензор $\underset{\sim}{S}$ ранга $r$ является *тензорной функцией* от тензоров $\underset{\sim}{T}^{(1)}, \underset{\sim}{T}^{(2)}, \ldots, \underset{\sim}{T}^{(N)}$ (соответственно, рангов $r_1 \equiv m, \quad r_2, \ldots, r_N \equiv n$)

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}^{(1)}, \underset{\sim}{T}^{(2)}, \ldots, \underset{\sim}{T}^{(N)}), \tag{5.1}$$

если независимо от выбора системы координат компоненты тензора $\underset{\sim}{S}$ являются одними и теми же функциями компонент тензоров $\underset{\sim}{T}^{(1)}, \underset{\sim}{T}^{(2)}, \ldots, \underset{\sim}{T}^{(N)}$. Иначе говоря, если в некоторой фиксированной системе координат $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ имеем

$$S^{i_1 \cdot i_3 \ldots i_r}_{\cdot i_2} = F^{i_1 \cdot i_3 \ldots i_r}_{\cdot i_2}(T^{(1)}_{j_1 \ldots j_m}, \ldots, T^{(N)k_2 \ldots k_n}_{k_1}), \tag{5.2}$$

то в любой другой, полученной из исходной преобразованием (1.1),

$$S^{i'_1 \cdot i'_3 \ldots i'_r}_{\cdot i'_2} = F^{i'_1 \cdot i'_3 \ldots i'_r}_{\cdot i'_2}(T^{(1)}_{j'_1 \ldots j'_m}, \ldots, T^{(N)k'_2 \ldots k'_n}_{k'_1}), \tag{5.3}$$

причем

$$A^{i'_1}_{\cdot i_1} B^{i_2 \cdot}_{\cdot i'_2} A^{i'_3}_{\cdot i_3} \ldots A^{i'_r \cdot}_{\cdot i_r} S^{i_1 \cdot i_3 \ldots i_r}_{\cdot i_2} =$$

$$= F^{i'_1 \cdot i'_3 \ldots i'_r}_{\cdot i'_2}(B^{j_1 \cdot}_{\cdot j'_1} \ldots B^{j_m \cdot}_{\cdot j'_m} T^{(1)}_{j_1 \ldots j_m}, \ldots$$

$$\ldots, B^{k_1 \cdot}_{\cdot k'_1} A^{k'_2 \cdot}_{\cdot k_2} A^{k'_3 \cdot}_{\cdot k_3} \ldots A^{k'_n \cdot}_{\cdot k_n} T^{(N)k_2 k_3 \ldots k_n}_{k_1}), \tag{5.4}$$

где взаимно обратные матрицы $A$ и $B$ являются якобиевыми матрицами преобразований (1.1) и (1.2) соответственно.

Обозначим группу симметрии тензора $\underset{\sim}{S}$ через $G_S$, а