ратная теорема. Если оператор $\underset{\sim}{f}$ допускает разложение (4.46) и квазилинейный, то выполняются условия взаимности и оператор $\underset{\sim}{f}$ является потенциальным.

§ 5. Общее определение тензорной функции

В предыдущем параграфе мы рассмотрели частное определение тензорной функции, основанное на известном определении функции от матриц [2]. Здесь мы рассмотрим общий случай.

Будем говорить, что тензор $\underset{\sim}{S}$ ранга r является *тензорной функцией* от тензоров $\underset{\sim}{T}^{(1)}, \underset{\sim}{T}^{(2)}, \ldots, \underset{\sim}{T}^{(N)}$ (соответственно, рангов $r_1 \equiv m, \quad r_2, \ldots, r_N \equiv n$)

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}^{(1)}, \underset{\sim}{T}^{(2)}, \ldots, \underset{\sim}{T}^{(N)}), \qquad (5.1)$$

если независимо от выбора системы координат компоненты тензора $\underset{\sim}{S}$ являются одними и теми же функциями компонент тензоров $\underset{\sim}{T}^{(1)}, \underset{\sim}{T}^{(2)}, \ldots, \underset{\sim}{T}^{(N)}$. Иначе говоря, если в некоторой фиксированной системе координат $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ имеем

$$S^{i_1 \cdot i_3 \ldots i_r}_{\cdot i_2} = F^{i_1 \cdot i_3 \ldots i_r}_{\cdot i_2}(T^{(1)}_{j_1 \ldots j_m}, \ldots, T^{(N)k_2 \ldots k_n}_{k_1}), \qquad (5.2)$$

то в любой другой, полученной из исходной преобразованием (1.1),

$$S^{i'_1 \cdot i'_3 \ldots i'_r}_{\cdot i'_2} = F^{i'_1 \cdot i'_3 \ldots i'_r}_{\cdot i'_2}(T^{(1)}_{j'_1 \ldots j'_m}, \ldots, T^{(N)k'_2 \ldots k'_n}_{k'_1}), \qquad (5.3)$$

причем

$$A^{i'_1}_{\cdot i_1} B^{i_2 \cdot}_{\cdot i'_2} A^{i'_3 \cdot}_{\cdot i_3} \ldots A^{i'_r \cdot}_{\cdot i_r} S^{i_1 \cdot i_3 \ldots i_r}_{\cdot i_2} =$$

$$= F^{i'_1 \cdot i'_3 \ldots i'_r}_{\cdot i'_2}(B^{j_1 \cdot}_{\cdot j'_1} \ldots B^{j_m \cdot}_{\cdot j'_m} T^{(1)}_{j_1 \ldots j_m}, \ldots$$

$$\ldots, B^{k_1 \cdot}_{\cdot k'_1} A^{k'_2 \cdot}_{\cdot k_2} A^{k'_3 \cdot}_{\cdot k_3} \ldots A^{k'_n \cdot}_{\cdot k_n} T^{(N)k_2 k_3 \ldots k_n}_{k_1}), \qquad (5.4)$$

где взаимно обратные матрицы A и B являются якобиевыми матрицами преобразований (1.1) и (1.2) соответственно.

Обозначим группу симметрии тензора $\underset{\sim}{S}$ через G_S, а группы симметрии тензоров $\underset{\sim}{T}^{(1)}$, $\underset{\sim}{T}^{(2)}$, ..., $\underset{\sim}{T}^{(N)}$ — через G_1, G_2, ..., G_N.

Упражнение 5.1. Доказать, что группа симметрии G_S тензора $\underset{\sim}{S}$, являющегося тензорной функцией (5.1), содержит в себе пересечение групп симметрии тензоров, являющихся аргументами этой функции, т. е.*

$$G_S \supseteq G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_N. \; \bullet \tag{5.5}$$

В силу того что множество тензоров ранга r, инвариантных относительно группы G_S, образует конечномерное линейное пространство K (см. упр. 1.1), можно представить тензор $\underset{\sim}{S}$ в виде линейной комбинации тензорного базиса пространства K:

$$\underset{\sim}{S} = \sum_{\alpha=1}^{k} \Omega_\alpha (I_1, \ldots, I_\beta) \underset{\sim}{S}^{(\alpha)}, \tag{5.6}$$

где $\Omega(I_1, \ldots, I_\beta)$ — скалярные функции *совместных инвариантов* $I_1, \ldots, I_\beta$ тензоров $\underset{\sim}{T}^{(1)}$, $\underset{\sim}{T}^{(2)}$, ..., $\underset{\sim}{T}^{(N)}$, а тензоры $\underset{\sim}{S}^{(\alpha)}$ образуют базис пространства K. Число элементов этого базиса k (размерность пространства K) совпадает с числом независимых компонент тензора $\underset{\sim}{S}$ и в зависимости от его ранга r, симметрии и характера группы G_S может быть подсчитано по формулам (1.14), (1.30), (1.31) и т. п.

В число аргументов функций $\Omega_\alpha(I_1, \ldots, I_\beta)$ должны быть включены, разумеется, только функционально независимые инварианты. Их число β не должно превышать числа функционально независимых инвариантов γ (относительно G_S) тензора $\underset{\sim}{S}$.

В самом деле, пусть $Y_1, \ldots, Y_\gamma$ — независимые инварианты тензора $\underset{\sim}{S}$. Тогда, как следует из (5.6), существуют скалярные функции

$$\begin{aligned} &Y_1 = Y_1(I_1, I_2, \ldots, I_\beta), \\ &Y_2 = Y_2(I_1, I_2, \ldots, I_\beta), \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &Y_\gamma = Y_\gamma(I_1, I_2, \ldots, I_\beta). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Если предположить, что $\beta > \gamma$, то из (5.7) следовало бы, что инварианты $I_{\gamma+1}$, $I_{\gamma+2}$, ..., I_β можно было бы

* Это утверждение по существу является математической формулировкой известного в физике *принципа Неймана*.

выразить через $I_1, \ldots, I_\gamma$, откуда следовало бы, что инвариаиты $I_1, \ldots, I_\beta$ функционально зависимы. Поэтому должно быть:

$$\beta \leqslant \gamma. \tag{5.8}$$

Упражиение 5.2. Доказать, что число функционально иезависимых инвариантов γ теизора $\underset{\sim}{S}$ не может быть больше числа независимых компонент этого тензора k. Поэтому

$$\beta \leqslant \gamma \leqslant k. \ ● \tag{5.9}$$

Рассмотрим, например, случай, когда один симметричный тензор второго ранга является *изотропной тензорной функцией* другого симметричного тензора второго ранга.

Очевидно, $r=2$, $r_1 \equiv m=2$ и в качестве второго аргумента тензорйой функции (5.1) можно выбрать единичный тензор (или тензор $\underset{\sim}{g}$), т. е. $r_2 \equiv N=2$. Тогда в некоторой прямоугольной декартовой системе координат можио записать

$$S_{ij}=F_{ij}(T_{kl}, \delta_{mn}). \tag{5.10}$$

Группой симметрии единичного тензора $\underset{\sim}{\mathcal{I}}$ является группа I, а симметричного тензора $\underset{\sim}{T}$ — группа ортотропии O, так как поверхность Коши тензора $\underset{\sim}{T}$ (см. § 4 гл. 3) имеет три плоскости симметрии. Таким образом группой симметрии тензора $\underset{\sim}{S}$ является пересечение этих групп, т. е. группа O.

Число независимых компонент тензора $\underset{\sim}{S}$, инвариантного относительно группы O, равно трем (упр. 1.4). Поэтому в разложении (5.6) следует положить $k=3$, а число функционально иезависимых инвариантов $I_1, \ldots, I_\beta$ и $Y_1, \ldots, Y_\gamma$ согласио (5.9) будет не более трех (положим $\beta=\gamma=3$).

Очевидно также, что тензоры $\underset{\sim}{T}$ и $\underset{\sim}{\mathcal{I}}$ являются инвариантными относительно группы O. Для того чтобы найти недостающий тензор базиса $\underset{\sim}{S}^{(\alpha)}$ в (5.6), воспользуемся теоремой, сформулированной в § 1, о том, что любой тензор, инвариантный относительно группы O, можно представить в виде операций тензорного умножения и свертывания тензоров $\underset{\sim}{T}$ и $\underset{\sim}{\mathcal{I}}$. Выберем, например, тензор $\underset{\sim}{T}^2$. Тогда из (5.6) имеем для данного случая

$$\underset{\sim}{S}=\Omega_1(I_1, I_2, I_3)\underset{\sim}{\mathcal{I}}+\Omega_2(I_1, I_2, I_3)\underset{\sim}{T}+\Omega_3(I_1, I_2, I_3)\underset{\sim}{T}^2, \tag{5.11}$$

где в качестве функционально независимых инвариантов можно выбрать, например,

$$I_1 = \langle \underset{\sim}{T} \rangle, \; I_2 = \langle \underset{\sim}{T}^2 \rangle, \; I_3 = \langle \underset{\sim}{T}^3 \rangle. \tag{5.12}$$

Итак, мы пришли к выражению изотропной функции (5.11), совпадающей с представлением (4.14), полученным в предыдущем параграфе из частных предпосылок.

В качестве другого примера рассмотрим случай, когда симметричный тензор второго ранга является *трансверсально изотропной тензорной функцией* другого симметричного тензора второго ранга. Совершенно очевидно (см. упр. 5.1), что для этого в число аргументов функции (5.1) необходимо включить образующие тензоры группы T_3 (2.15).

Таким образом, аргументами функции (5.1) являются симметричные тензоры с компонентами T_{ij}, δ_{ij} и вектор с компонентами δ_{i3}. Следовательно, $r=2$, $r_1 \equiv \equiv m=2$, $r_2=2$, $r_3 \equiv N=1$.

Если ни одна из главных осей тензора $\underset{\sim}{T}$ не совпадает с осью x_3, то группа симметрии G_S тензора $\underset{\sim}{S}$ согласно (5.5) состоит только из единичной матрицы. Применяя формулы (1.30) и (1.27), получаем, что число независимых компонент тензора $\underset{\sim}{S}$ $k=6$. Согласно теореме, сформулированной в § 1, в качестве тензоров $\underset{\sim}{S}^{(\alpha)}$ (5.6) можно выбрать, например, тензоры с компонентами

$$\delta_{ij}, \; \delta_{i3}\delta_{j3}, \; T_{ij}, \; \delta_{i3}T_{3j}+\delta_{j3}T_{3i}, \; T_{ik}T_{kj}, \; T_{i3}T_{3j}. \tag{5.13}$$

В качестве функционально независимых инвариантов можно выбрать, например, дополнительно к инвариантам (5.12) еще следующие [12]:

$$I_4 = T_{33}, \; I_5 = T_{3i}T_{i3}, \tag{5.14}$$

т. е. $\beta=\gamma=5$, и неравенства (5.9) удовлетворяются.

Таким образом, для трансверсально изотропной функции имеем из (5.6):

$$\begin{aligned} S_{ij} = {} & \Omega_1(\cdot)\,\delta_{ij} + \Omega_2(\cdot)\,\delta_{i3}\delta_{j3} + \Omega_3(\cdot)\,T_{ij} + \\ & + \Omega_4(\cdot)\,(\delta_{i3}T_{3j} + \delta_{j3}T_{3i}) + \Omega_5(\cdot)\,T_{ik}T_{kj} + \\ & + \Omega_6(\cdot)\,T_{i3}T_{3j}, \end{aligned} \tag{5.15}$$

где функции $\Omega_\alpha(\cdot)$ $(\alpha=1, \ldots, 6)$ являются функциями инвариантов $I_1, \ldots, I_5$ (5.14), (5.12).

Упражнение 5.3. Показать, что для случая, когда симметричный тензор второго ранга $\underset{\sim}{S}$ является *ортотропной функцией* симметричного тензора второго ранга T: $\gamma=\beta=k=6$ и представление (5.6) имеет вид

$$S_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{3}\Omega_\alpha(I_1,\ \ldots,\ I_6)\,\delta_{i\alpha}\delta_{\alpha j}+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{3}\Omega_{\alpha+1}(I_1,\ \ldots,\ I_6)\,(T_{i\alpha}\delta_{\alpha j}+T_{j\alpha}\delta_{\alpha i}), \qquad (5.16)$$

где функции $\Omega_\alpha(\cdot)$ $(\alpha=1,\ldots,6)$ зависят, например, от инвариантов

$$I_\varkappa=T_{\varkappa\varkappa}\ (\varkappa=1,\ 2,\ 3),\ I^2_{\rho+1}=T_{\rho i}T_{i\rho}\ (\rho=1,\ 2,\ 3). \qquad (5.17)$$

Итак, для того чтобы построить тензорную функцию, инвариантную относительно подгруппы G полной ортогональной группы I, связывающую два симметричных тензора второго ранга $\underset{\sim}{S}$ и $\underset{\sim}{T}$, нужно рассмотреть функцию (5.1), включив в число аргументов кроме тензора $\underset{\sim}{T}$ (группой симметрии которого является группа ортотропии O) конечное число образующих тензоров группы G:

$$\underset{\sim}{a}^{(1)},\ \underset{\sim}{a}^{(2)},\ \ldots,\underset{\sim}{a}^{(m)} \qquad (5.18)$$

(для кристаллографических точечных групп и текстур эти тензоры имеют ранг 1, 2, 3, 4 и 6 [4.6]).

Группа симметрии G_S тензора $\underset{\sim}{S}$ определится тогда пересечением групп O и G:

$$G_S\supseteq O\cap G, \qquad (5.19)$$

а тензорный базис $\underset{\sim}{S}^{(\alpha)}$ (5.6) будет состоять из k линейно независимых тензоров $(k\leqslant 6)$, выбранных из тензоров

$$\underset{\sim}{\mathcal{I}},\ \underset{\sim}{T},\ \underset{\sim}{T}^2, \qquad (5.20)$$

и симметричных тензоров второго ранга, образованных из набора (5.18) и тензоров, полученных путем тензорного умножения и свертывания тензоров (5.18) и (5.20). При этом функции Ω_α (5.6) зависят от β $(\beta\leqslant k)$ функционально независимых инвариантов тензоров $S^{(\alpha)}$ $(\alpha=1,\ \ldots,\ k)$.

Назовем построенную таким обазом тензорную функцию *квазилинейной*, если среди тензоров $\underset{\sim}{S}^{(\alpha)}$ в разложении (5.6) оставлены только тензоры, линейно зависящие от тензора $\underset{\sim}{T}$ или не зависящие от него вовсе, а среди инвариантов $I_1, \ldots, I_\beta$, являющихся аргументами функций Ω_α (5.6), — только линейные и квадратичные инварианты тензора $\underset{\sim}{T}$ (см. § 3).

Заметим, что для некоторых групп G можно построить квазилинейные функции без введения каких-либо предположений, ограничивающих общность. Так будет, если возможно на основе тензоров $\underset{\sim}{\mathcal{I}}$, $\underset{\sim}{T}$ и (5.18) образовать не менее k ($k \leqslant 6$) тензоров базиса $\underset{\sim}{S}^{(\alpha)}$, линейно зависящих от тензора $\underset{\sim}{T}$ или вовсе не зависящих от него. Для этого достаточно, чтобы кроме единичного тензора $\underset{\sim}{\mathcal{I}}$ нашлось не более двух линейно независимых тензоров второго ранга, построенных на основе тензоров (5.18) путем тензорного умножения и сверток. Например, ортотропная тензорная функция (5.16), построенная из общих соображений, является квазилинейной функцией.

Упражнение 5.4. Пусть два симметричных тензора $\underset{\sim}{S}$ и $\underset{\sim}{T}$, обладающие одной группой симметрии G, имеют спектральное представление (2.36) в виде

$$\underset{\sim}{S} = \sum_{\alpha=1}^{n} \underset{\sim}{P}^{(\alpha)}, \quad \underset{\sim}{T} = \sum_{\alpha=1}^{n} \underset{\sim}{p}^{(\alpha)} \quad (n \leqslant 6), \tag{5.21}$$

где

$$\frac{P_{ij}^{(\alpha)} P_{ij}^{(\beta)}}{Y_\alpha Y_\beta} = \frac{p_{ij}^{(\alpha)} p_{ij}^{(\beta)}}{I_\alpha I_\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{5.22}$$

Доказать, что *квазилинейная тензорная функция*

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}), \tag{5.23}$$

инвариантная относительно группы G, может быть представлена в виде

$$P_{ij}^{(\alpha)} = \frac{Y_\alpha}{I_\alpha} p_{ij}^{(\alpha)} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.24}$$

где Y_α — некоторые функции инвариантов I_α:

$$Y_\alpha = Y_\alpha(I_1, \ldots, I_n) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.25}$$

Упражнение 5.5. Показать, что если *тензорная функция потенциальна* (4.36), то число независимых инвариантов β равно числу линейно независимых тензоров $\underset{\sim}{S}^{(\alpha)}$, составляющих базис. В частности, для трансверсально изотропной потенциальной функции в предположении, что существует скалярная функция $W(I_1, \ldots, I_5)$ инвариантов (5.12) и (5.14), из (5.15) следует, что

$$\Omega_1 = \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \Omega_2 = \frac{\partial W}{\partial I_4}, \quad \Omega_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad \Omega_4 = \frac{\partial W}{\partial I_5},$$

$$\Omega_5 = \frac{1}{3}\frac{\partial W}{\partial I_3}, \quad \Omega_6 \equiv 0. \qquad (5.26)$$

§ 6. Производиая по тензорному аргументу

При изложении материала мы не раз сталкивались с проблемой дифференцирования скалярных и тензорных функций по тензорному аргументу (см. § 3 гл. 3, предыдущие параграфы настоящей главы).

Теперь мы займемся этим вопросом подробнее. Для этого обратимся к понятиям дифференциала и функциональной производной (4.47), введенным в § 4.

Прежде всего заметим, что *дифференциал тензорной функции* (или оператора) имеет тот же ранг, что и сама функция.

Из (5.1) согласно (4.47) будем иметь

$$D\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}^{(1)}, \ldots, \underset{\sim}{T}^{(N)}; \delta\underset{\sim}{T}^{(1)}, \ldots, \delta\underset{\sim}{T}^{(N)}) =$$

$$= \frac{\partial \underset{\sim}{F}}{\partial \underset{\sim}{T}^{(1)}} \cdot d\underset{\sim}{T}^{(1)} + \ldots + \frac{\partial \underset{\sim}{F}}{\partial \underset{\sim}{T}^{(N)}} \cdot \delta\underset{\sim}{T}^{(N)} \equiv$$

$$\equiv \frac{d}{d\xi}[\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}^{(1)} + \xi\,\delta\underset{\sim}{T}^{(1)}, \ldots, \underset{\sim}{T}^{(N)} + \xi\,\delta\underset{\sim}{T}^{(N)})]_{\xi=0}, \qquad (6.1)$$

где под точкой понимается скалярное произведение порядка, равного рангу соответствующего тензора $\underset{\sim}{T}^{(i)}$ $(i=1, \ldots, N)$. (Здесь под $\delta\underset{\sim}{T}^{(i)}$ мы понимаем «приращение» тензора $\underset{\sim}{T}^{(i)}$, по которому лииеен дифференциал $D\underset{\sim}{F}$ и который в § 4 мы обозиачали через $\underset{\sim}{h}$.)

Запишем выражение (6.1) в компонентах, исходя из (5.2) и (4.47):

$$DF^{i_1 \cdot i_3 \ldots i_r}_{\cdot i_2}(T^{(1)}_{j_1 \ldots j_m}, \ldots, T^{(N)k_2 \ldots k_n}_{k_1}; \delta T^{(1)}_{j_1 \ldots j_m}, \ldots$$

$$\ldots, \delta T^{(N)k_2 \ldots k_n}_{k_1}) = \frac{d}{d\xi}\{F^{i_1 \cdot i_3 \ldots i_r}_{\cdot i_2}(T^{(1)}_{j_1 \ldots j_m} +$$