зоров $\underset{\sim}{S}^{(\alpha)}$, составляющих базис. В частности, для трансверсально изотропной потенциальной функции в предположении, что существует скалярная функция $W(I_1, \ldots, I_5)$ инвариантов (5.12) и (5.14), из (5.15) следует, что

$$\Omega_1 = \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \Omega_2 = \frac{\partial W}{\partial I_4}, \quad \Omega_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad \Omega_4 = \frac{\partial W}{\partial I_5},$$

$$\Omega_5 = \frac{1}{3}\frac{\partial W}{\partial I_3}, \quad \Omega_6 \equiv 0. \tag{5.26}$$

§ 6. Производиая по тензорному аргументу

При изложении материала мы не раз сталкивались с проблемой дифференцирования скалярных и тензорных функций по тензорному аргументу (см. § 3 гл. 3, предыдущие параграфы настоящей главы).

Теперь мы займемся этим вопросом подробнее. Для этого обратимся к понятиям дифференциала и функциональной производной (4.47), введенным в § 4.

Прежде всего заметим, что *дифференциал тензорной функции* (или оператора) имеет тот же ранг, что и сама функция.

Из (5.1) согласно (4.47) будем иметь

$$\underset{\sim}{DF}(\underset{\sim}{T}^{(1)}, \ldots, \underset{\sim}{T}^{(N)}; \delta\underset{\sim}{T}^{(1)}, \ldots, \delta\underset{\sim}{T}^{(N)}) =$$

$$= \frac{\partial \underset{\sim}{F}}{\partial \underset{\sim}{T}^{(1)}} \cdot d\underset{\sim}{T}^{(1)} + \ldots + \frac{\partial \underset{\sim}{F}}{\partial \underset{\sim}{T}^{(N)}} \cdot \delta\underset{\sim}{T}^{(N)} \equiv$$

$$\equiv \frac{d}{d\xi}\left[\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}^{(1)} + \xi\,\delta\underset{\sim}{T}^{(1)}, \ldots, \underset{\sim}{T}^{(N)} + \xi\,\delta\underset{\sim}{T}^{(N)})\right]_{\xi=0}, \tag{6.1}$$

где под точкой понимается скалярное произведение порядка, равного рангу соответствующего тензора $\underset{\sim}{T}^{(i)}$ $(i=1, \ldots, N)$. (Здесь под $\delta\underset{\sim}{T}^{(i)}$ мы понимаем «приращение» тензора $\underset{\sim}{T}^{(i)}$, по которому лииеен дифференциал $\underset{\sim}{DF}$ и который в § 4 мы обозначали через $\underset{\sim}{h}$.)

Запишем выражение (6.1) в компонентах, исходя из (5.2) и (4.47):

$$DF^{i_1 \cdot i_3 \ldots i_r}_{\cdot i_2}(T^{(1)}_{j_1 \ldots j_m}, \ldots, T^{(N)k_2 \ldots k_n}_{k_1}; \delta T^{(1)}_{j_1 \ldots j_m}, \ldots$$

$$\ldots, \delta T^{(N)k_2 \ldots k_n}_{k_1}) = \frac{d}{d\xi}\{F^{i_1 \cdot i_3 \ldots i_r}_{\cdot i_2}(T^{(1)}_{j_1 \ldots j_m} +$$

$$+\xi\,\delta T^{(1)}_{j_1\ldots j_m},\ \ldots,\ T^{(N)k_2\ldots k_n}_{k_1}+\xi\,\delta T^{(N)k_2\ldots k_n}_{k_1}\}_{\xi=0}=$$

$$=\frac{\partial F^{i_1\cdot i_3\ldots i_r}_{\cdot i_2}}{\partial T^{(1)}_{j_1\ldots j_m}}\,\delta T^{(1)}_{j_1\ldots j_m}+\ldots+\frac{\partial F^{i_1\cdot i_3\ldots i_r}_{\cdot i_2}}{\partial T^{(N)k_2\ldots k_n}_{k_1}}\,\delta T^{(N)k_2\ldots k_n}_{k_1}. \tag{6.2}$$

Естественно назвать производные

$$\frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{T}^{(1)}}=\frac{\partial F^{i_1\cdot i_3\ldots i_r}_{\cdot i_2}}{\partial T^{(1)}_{j_1\ldots j_m}}\vec{e}_{i_1}\otimes\vec{e}^{\,i_2}\otimes\vec{e}_{i_3}\otimes\ldots\otimes\vec{e}_{i_r}\otimes\vec{e}_{j_1}\otimes\ldots\otimes\vec{e}_{j_m}.$$

. . . .

$$\frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{T}^{(N)}}=\frac{\partial F^{i_1\cdot i_3\ldots i_r}_{\cdot i_2}}{\partial T^{(N)k_2\ldots k_n}_{k_1}}\vec{e}_{i_1}\otimes\vec{e}^{\,i_2}\otimes\vec{e}_{i_3}\otimes\ldots\otimes\vec{e}_{i_r}\otimes\vec{e}_{k_1}\otimes\vec{e}^{\,k_2}\otimes\ldots\vec{e}^{\,k_n}, \tag{6.3}$$

которые являются тензорами ранга $r+r_1\equiv r+m$, $r+r_2, \ldots, r+r_N\equiv r+n$, производными тензорной функции по тензорному аргументу.

Следовательно, для того чтобы вычислить производную скалярной или тензорной функцнн по тензорному аргументу $\underset{\sim}{T}^{(\alpha)}$, необходимо по формуле (6.1) найти дифференциал рассматриваемой функции. Выражение при $\delta\underset{\sim}{T}^{(\alpha)}$ и будет искомой производной. При этом индексы компонент тензора $\delta\underset{\sim}{T}^{(\alpha)}$ должны совпадать с индексами компонент тензорного аргумента $\underset{\sim}{T}^{(\alpha)}$, по которому ведется дифференцирование. Для этого иногда следует воспользоваться заменой немого индекса или операцией жонглирования индексов (см. § 1 гл. 1).

Пусть, например, нужно вычислить производную

$$\frac{\partial S^{i\cdot}_{\cdot j}}{\partial T_{mn}};\quad S^{i\cdot}_{\cdot j}\equiv T^{i\cdot}_{\cdot k}T^{k\cdot}_{\cdot j}. \tag{6.4}$$

Нетрудно видеть, что величины (6.4) являются компонентами тензора четвертого ранга.

Образуем согласно (6.1) дифференциал

$$D(S^{i\cdot}_{\cdot j},\ \delta S^{i\cdot}_{\cdot j})=\frac{d}{d\xi}\left[(T^{i\cdot}_{\cdot k}+\xi\,\delta T^{i\cdot}_{\cdot k})\,(T^{k\cdot}_{\cdot j}+\xi\,\delta T^{k\cdot}_{\cdot j})\right]_{\xi=0}=$$

$$=T^{i\cdot}_{\cdot k}\,\delta T^{k\cdot}_{\cdot j}+\delta T^{i\cdot}_{\cdot k}T^{k\cdot}_{\cdot j}, \tag{6.5}$$

но аргументом дифференцирования в (6.4) являются компоненты T_{mn}. Поэтому выражаем

$$\delta T^{k\cdot}_{\cdot j} = \delta T_{mn} g^{km} \delta^n_j, \quad \delta T^{i\cdot}_{\cdot k} = \delta T_{mn} g^{im} \delta^n_k. \qquad (6.6)$$

Подставляя (6.6) в (6.5) и рассматривая выражение при δT_{mn}, получаем искомую производную

$$\frac{\partial S^{i\cdot}_{\cdot j}}{\partial T_{mn}} = T^{i\cdot}_{\cdot k} g^{km} \delta^n_j + g^{im} \delta^n_k T^{k\cdot}_{\cdot j} = T^{im} \delta^n_j + T^{n\cdot}_{\cdot j} g^{im}. \qquad (6.7)$$

Заметим, что если тензор $\underset{\sim}{T}$, по которому ведется дифференцирование, — симметричный ($T_{mn} = T_{nm}$), то выражения (6.6) нужно записать так, чтобы эта симметрия была учтена:

$$\delta T^{k\cdot}_{\cdot j} = \delta T_{mn} \cdot \frac{1}{2} (g^{km} \delta^n_j + g^{kn} \delta^m_j),$$

$$\delta T^{i\cdot}_{\cdot k} = \delta T_{mn} \cdot \frac{1}{2} (g^{im} \delta^n_k + g^{in} \delta^m_k). \qquad (6.8)$$

Тогда, подставляя (6.8) в (6.5), получим вместо (6.7):

$$\frac{\partial S^{i\cdot}_{\cdot j}}{\partial T_{mn}} = \frac{1}{2} [T^{i\cdot}_{\cdot k} (g^{km} \delta^n_j + g^{kn} \delta^m_j) + (g^{im} \delta^n_k + g^{in} \delta^m_k) T^{k\cdot}_{\cdot j}] =$$

$$= \frac{1}{2} (T^{im} \delta^n_j + T^{in} \delta^m_j + T^{n\cdot}_{\cdot j} g^{im} + T^{m\cdot}_{\cdot j} g^{in}). \qquad (6.9)$$

Упражнение 6.1. Показать, что если тензор $\underset{\sim}{T}$ — антисимметричный ($T_{mn} = -T_{nm}$), то соотношения (6.7) имеют вид

$$\frac{\partial S^{i\cdot}_{\cdot j}}{\partial T_{mn}} = \frac{1}{2} (T^{im} \delta^n_j - T^{in} \delta^m_j + T^{n\cdot}_{\cdot j} g^{im} - T^{m\cdot}_{\cdot j} g^{in}). \bullet \qquad (6.10)$$

Если считать, что все действия происходят в евклидовом пространстве R_3, то, используя в базисных полиадах различные наборы векторов ковариантного и контравариантного базисов, производным тензорных функций по тензорному аргументу, носящим инвариантный характер, можно придать различные формы записи. Например,

$$\frac{\partial \underset{\sim}{S}}{\partial \underset{\sim}{T}} = \frac{\partial S^{i\cdot}_{\cdot j}}{\partial T_{mn}} \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j \otimes \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n = \frac{\partial S_{ij}}{\partial T^{mn}} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \otimes \vec{e}^m \otimes \vec{e}^n =$$

$$= \frac{\partial S^{ij}}{\partial T_{mn}} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n \tag{6.11}$$

и т. д.

Поэтому выражения (6.6) в инвариантной форме (бескоординатной записи) будут иметь вид

$$\delta \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{\Delta} : \delta \underset{\sim}{T}, \tag{6.12}$$

где $\underset{\sim}{\Delta}$ — единичный тензор четвертого ранга (см. (6.22) гл. 3), а выражения (6.7), учитывая (6.4), в виде

$$\frac{\partial \underset{\sim}{S}}{\partial \underset{\sim}{T}} = \frac{\partial \underset{\sim}{T}^2}{\partial \underset{\sim}{T}} = \underset{\sim}{T} \otimes \underset{\sim}{\mathcal{J}} + \underset{\sim}{\mathcal{J}} \otimes \underset{\sim}{T}. \tag{6.13}$$

Частным случаем рассматриваемых производных являются производные *скалярных функций тензорного аргумента,* а еще более частным — *производные инвариантов по тензору.*

Упражнение 6.2. Показать, что производные инвариантов (5.12) и (5.14) по симметричному тензору $\underset{\sim}{T}$ имеют вид

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial I_1}{\partial T_{ij}} + \frac{\partial I_1}{\partial T_{ji}}\right) = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial T_{ij}} + \frac{\partial I_2}{\partial T_{ji}} = T_{ij} + T_{ji},$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial T_{ij}} + \frac{\partial I_3}{\partial T_{ji}} = 3T_{i\cdot}^{\cdot k} T_{kj}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial I_4}{\partial T_{ij}} + \frac{\partial I_4}{\partial T_{ji}}\right) = \delta_{3i}\delta_{3j},$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial T_{ij}} + \frac{\partial I_5}{\partial T_{ji}} = \delta_{3i} T_{3j} + \delta_{3j} T_{3i}. \tag{6.14}$$

Упражнение 6.3. Показать, что *ортотропная потенциальная функция* (5.16) имеет вид

$$S_{ij} = \sum_{\varkappa=1}^{3} \frac{\partial W}{\partial I_\varkappa} \delta_{\varkappa i}\delta_{\varkappa j} + \sum_{\rho=1}^{3} \frac{\partial W}{\partial I_{\rho+3}} (T_{i\rho}\delta_{\rho j} + T_{j\rho}\delta_{i\rho}), \tag{6.15}$$

где потенциал W зависит от шести инвариантов (5.17).

Упражнение 6.4. Показать, что для *изотропной потенциальной функции* (5.11) *производная* симметричного тензора $\underset{\sim}{S}$ по симметричному тензору $\underset{\sim}{T}$ имеет вид

$$\frac{\partial \underset{\sim}{S}}{\partial \underset{\sim}{T}} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} \underset{\sim}{\mathcal{J}} \otimes \underset{\sim}{\mathcal{J}} + \left(2\frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + 3\frac{\partial W}{\partial I_3}\right)(\underset{\sim}{\mathcal{J}} \otimes \underset{\sim}{T} +$$

$$+\underset{\sim}{T}\otimes\underset{\sim}{\mathcal{J}})+4\frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2}\underset{\sim}{T}\otimes\underset{\sim}{T}+3\frac{\partial^2 W}{\partial I_1\partial I_3}(\underset{\sim}{\mathcal{J}}\otimes\underset{\sim}{T}^2+$$

$$+\underset{\sim}{T}^2\otimes\underset{\sim}{\mathcal{J}})+6\frac{\partial^2 W}{\partial I_2\partial I_3}(\underset{\sim}{T}\otimes\underset{\sim}{T}^2+\underset{\sim}{T}^2\otimes\underset{\sim}{T})+$$

$$+9\frac{\partial^2 W}{\partial I_3^2}\underset{\sim}{T}^2\otimes\underset{\sim}{T}^2+2\frac{\partial W}{\partial I_2}\underset{\sim}{\Delta}, \qquad (6.16)$$

где потенциал W зависит от трех инвариантов (5.12).

§ 7. Дифференцирование тензорного поля по параметру

Дифференцирование тензорных полей по параметру (в качестве которого в приложениях нередко выступает время t) можно понимать в различных смыслах. С одним из них, основанным на так называемом абсолютном дифференцировании, мы познакомимся в следующей главе. Можно рассматривать также дифференцирование тензоров, принадлежащих некоторой «движущейся» поверхности в евклидовом пространстве R_3.*

Здесь мы рассмотрим дифференцирование по параметру тензоров при деформации пространства R_3.

Пусть задана криволинейная система координат введением функций

$$\vec{r}=\vec{r}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3). \qquad (7.1)$$

Известным способом мы вводим векторы локального базиса $\vec{e}_i$, фундаментальные матрицы g_{ij} и g^{ij}. Деформация пространства R_3 описывается согласно § 7 гл. 3 законом

$$\vec{R}=\vec{R}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, t), \qquad (7.2)$$

где t — некоторый параметр. Мы вводим локальный базис $\vec{E}_i$, фундаментальные матрицы G_{ij}, G^{ij} и т. д.

Записав соотношения (7.2) в виде

$$\xi^i=\xi^i(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, t), \qquad (7.3)$$

---

* См., например, работу: Повстенко Ю. З., Подстригач Я. С. Дифференцирование по времени тензоров, заданных на поверхности, движущейся в трехмерном евклидовом пространстве. — ПММ, 1983, т. 47, вып. 6, с. 1038—1045.