$$+\underset{\sim}{T}\otimes\underset{\sim}{\mathcal{I}})+4\frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2}\underset{\sim}{T}\otimes\underset{\sim}{T}+3\frac{\partial^2 W}{\partial I_1\partial I_3}(\underset{\sim}{\mathcal{I}}\otimes\underset{\sim}{T}^2+$$

$$+T^2\otimes\mathcal{I})+6\frac{\partial^2 W}{\partial I_2\partial I_3}(\underset{\sim}{T}\otimes\underset{\sim}{T}^2+\underset{\sim}{T}^2\otimes T)+$$

$$+9\frac{\partial^2 W}{\partial I_3^2}\underset{\sim}{T}^2\otimes\underset{\sim}{T}^2+2\frac{\partial W}{\partial I_2}\underset{\sim}{\Delta}, \qquad (6.16)$$

где потенциал W зависит от трех инвариантов (5.12).

§ 7. Дифференцирование тензорного поля по параметру

Дифференцирование тензорных полей по параметру (в качестве которого в приложениях нередко выступает время t) можно понимать в различных смыслах. С одним из них, основанным на так называемом абсолютном дифференцировании, мы познакомимся в следующей главе. Можно рассматривать также дифференцирование тензоров, принадлежащих некоторой «движущейся» поверхности в евклидовом пространстве R_3.*

Здесь мы рассмотрим дифференцирование по параметру тензоров при деформации пространства R_3.

Пусть задана криволинейная система координат введением функций

$$\vec{r}=\vec{r}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3). \qquad (7.1)$$

Известным способом мы вводим векторы локального базиса $\vec{e}_i$, фундаментальные матрицы g_{ij} и g^{ij}. Деформация пространства R_3 описывается согласно § 7 гл. 3 законом

$$\vec{R}=\vec{R}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, t), \qquad (7.2)$$

где t — некоторый параметр. Мы вводим локальный базис $\vec{E}_i$, фундаментальные матрицы G_{ij}, G^{ij} и т. д.

Записав соотношения (7.2) в виде

$$\xi^i=\xi^i(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, t), \qquad (7.3)$$

---

* См., например, работу: Повстенко Ю. З., Подстригач Я. С. Дифференцирование по времени тензоров, заданных на поверхности, движущейся в трехмерном евклидовом пространстве. — ПММ, 1983, т. 47, вып. 6, с. 1038—1045.

где ξ^1, ξ^2, ξ^3 — некоторая криволинейная система координат, можно ввести локальный базис $\vec{\vartheta}_i$:

$$\vartheta_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi^i}. \tag{7.4}$$

Будем считать, что при некотором фиксированном значении параметра t (в некоторый момент времени t) все три базиса $\vec{e}_i$, $\vec{E}_i$, $\vec{\vartheta}_i$ совпадают между собой [10]. (Два первых базиса связаны с *лагранжевой системой координат* α^i, а третий — с *эйлеровой* ξ^i.)

Тогда каждому вектору $\vec{a}$ соответствует вектор $\vec{A}$, причем

$$\vec{a} = \mathring{A}^i \vec{e}_i = \mathring{A}_i \vec{e}^i, \quad \vec{A} = A^i \vec{E}_i = A_i \vec{E}^i = a^i \vec{\vartheta}_i = a_i \vec{\vartheta}^i. \tag{7.5}$$

Согласно сделанному предположению при фиксированном t $\vec{e}_i = \vec{E}_i$ и поэтому (см. § 7 гл. 3)

$$\mathring{A}^i = A^i, \quad \mathring{A}_i = A_i. \tag{7.6}$$

Однако в последующие моменты $t_1 > t$ уже $\vec{e}_i \neq \vec{E}_i$ и хотя по определению $\mathring{A}^i = A^i$ и при t_1, но

$$\mathring{A}_j \equiv g_{ji} \mathring{A}^i \neq A_j \equiv G_{ji} A^i. \tag{7.7}$$

Разумеется, можно в связи с деформацией пространства поставить в соответствие вектору $\vec{a}$ вектор $\vec{A}$ так, чтобы в момент $t_1 > t$ $\mathring{A}_i = A_i$, но при таком соответствии уже, вообще говоря, $\mathring{A}^i \neq A^i$.

Перейдем теперь к вопросу о дифференцировании векторов базиса по параметру. Прежде всего заметим, что из (7.1) при фиксированных координатах α^i следует

$$\left(\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial t}\right)_\alpha = 0, \quad \left(\frac{\partial \vec{e}^i}{\partial t}\right)_\alpha = 0. \tag{7.8}$$

Введем теперь понятие вектора скорости $\vec{v}$, используя определение (7.4):

$$\vec{v} \equiv \frac{\partial \vec{R}}{dt} = \left(\frac{\partial \vec{R}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, t)}{\partial t}\right)_\alpha = \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \vec{\vartheta}_i = v^i \vec{\vartheta}_i. \tag{7.9}$$

Согласно (7.21) гл. 3 имеем

$$\vec{E}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha^i} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi^j} \frac{\partial \xi^j}{\partial \alpha^i} = \frac{\partial \xi^j}{\partial \alpha^i} \vec{э}_j, \tag{7.10}$$

поэтому

$$\left(\frac{\partial \vec{E}_i}{\partial t} \right)_\alpha = \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial \alpha^i \partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \alpha^i} = \nabla_i v^j \vec{E}_j, \tag{7.11}$$

где ∇_i — символы ковариантной производной, построенные с использованием фундаментальной матрицы G_{ij}. С другой стороны,

$$\left(\frac{\partial \vec{E}_i}{\partial t} \right)_\alpha = \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial \alpha^i \partial t} = \frac{\partial \xi^j}{\partial \alpha^i} \left(\frac{\partial \vec{э}_j}{\partial t} \right)_\xi + \frac{\partial v^j}{\partial \alpha^i} \vec{э}_j. \tag{7.12}$$

Сравнивая (7.11) и (7.12), получаем

$$\left(\frac{\partial v^j}{\partial \alpha^i} + \Gamma^j_{ik} v^k \right) \vec{E}_j = \frac{\partial \xi^j}{\partial \alpha^i} \left(\frac{\partial \vec{э}_j}{\partial t} \right)_\xi + \frac{\partial v^j}{\partial \alpha^i} \vec{э}_j. \tag{7.13}$$

Предположим, что в фиксированный момент времени t: $\vec{E}_j = \vec{e}_j$, $\xi^i = \alpha^i$ и потому из (7.13) следует, что

$$\left(\frac{\partial \vec{э}_j}{\partial t} \right)_\xi = \Gamma^j_{ik} v^k \vec{э}_j. \tag{7.14}$$

Упражнение 7.1. Используя формулу

$$\vec{E}^i \cdot \vec{E}_j = \delta^i_j, \tag{7.15}$$

показать, что из (7.11) следует

$$\left(\frac{\partial \vec{E}^i}{\partial t} \right)_\alpha = -\nabla_j v^i \vec{E}^j. \tag{7.16}$$

Упражнение 7.2. Используя формулу

$$\vec{э}^i \cdot \vec{э}_j = \delta^i_j, \tag{7.17}$$

показать, что из (7.14) следует

$$\left(\frac{\partial \vec{э}^i}{\partial t} \right)_\xi = -\Gamma^i_{jk} v^j \vec{э}^k. \tag{7.18}$$

Упражнение 7.3. Используя формулы (7.8), (7.11), (7.14), (7.16), (7.18) дифференцирования по параметру t векторов базиса, показать, что из (7.5) следует

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=\left(\frac{\partial \mathring{A}^i}{\partial t}\right)_\alpha \vec{e}_i=\left(\frac{\partial \mathring{A}_i}{\partial t}\right)_\alpha \vec{e}^i, \qquad (7.19)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\left[\left(\frac{\partial A^i}{\partial t}\right)_\alpha + A^k\nabla_k v^i\right]\vec{E}_i=\left[\left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)_\alpha - A_k\nabla_i v^k\right]\vec{E}^i, \qquad (7.20)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\left[\left(\frac{\partial a^i}{\partial t}\right)_\alpha + a^k\Gamma^i_{kj}v^j\right]\vec{\mathit{э}}_i=\left[\left(\frac{\partial a_i}{\partial t}\right)_\alpha - a_k\Gamma^k_{ij}v^j\right]\vec{\mathit{э}}^i. \qquad (7.21)$$

●

Заметим, что если в момент времени t

$$\left(\frac{\partial \mathring{A}^i}{\partial t}\right)_\alpha=\left(\frac{\partial A^i}{\partial t}\right)_\alpha,\quad \frac{d\vec{a}}{dt}=\left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)\vec{E}_i\equiv\frac{d\vec{A}_1}{dt}, \qquad (7.22)$$

то в момент $t_1>t$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{d\vec{A}_1}{dt}+A^k\nabla_k v^i\vec{E}_i, \qquad (7.23)$$

причем если $\left(\frac{\partial A^i}{\partial t}\right)_\alpha$, $\left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)_\alpha$, $\left(\frac{\partial \mathring{A}^i}{\partial t}\right)_\alpha$, $\left(\frac{\partial \mathring{A}_i}{\partial t}\right)_\alpha$ являются компонентами вектора, то $\left(\frac{\partial a^i}{\partial t}\right)_\alpha$ и $\left(\frac{\partial a_i}{\partial t}\right)_\alpha$ таковыми не являются.

Формулу (7.21) можно переписать в виде

$$\frac{d\vec{A}}{\partial t}=\left[\left(\frac{\partial a^i}{\partial t}\right)_\xi + v^j\left(\frac{\partial a^i}{\partial \xi^j}+a^k\Gamma^i_{kj}\right)\right]\vec{\mathit{э}}_i\equiv\frac{da^i}{dt}\vec{\mathit{э}}_i, \qquad (7.24)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\left[\left(\frac{\partial a_i}{\partial t}\right)_\xi + v^j\left(\frac{\partial a_i}{\partial \xi^j}-a_k\Gamma^k_{ij}\right)\right]\vec{\mathit{э}}^i\equiv\frac{da_i}{dt}\vec{\mathit{э}}^i, \qquad (7.25)$$

где $\frac{da^i}{dt}$ и $\frac{da_i}{dt}$ — так называемые *полные производные* по параметру t.

Таким образом, можно вводить производные по параметру t в различных смыслах, причем полученные формулы легко обобщаются на случай тензора произвольного ранга.

Упражнение 7.4. Показать, что из (7.20) и (7.21) следует

$$\left(\frac{\partial A^i}{\partial t}\right)_\alpha=\left(\frac{\partial a^i}{\partial t}\right)_\alpha-a^k\frac{\partial v^i}{\partial\alpha^k},\ \left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)_\alpha=$$

$$=\left(\frac{\partial a_i}{\partial t}\right)_\alpha+a_k\frac{\partial v^k}{\partial\alpha^i},\tag{7.26}$$

$$\left(\frac{\partial A^i}{\partial t}\right)_\alpha=\left(\frac{\partial a^i}{\partial t}\right)_\xi+La^i,\ \left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)_\alpha=\left(\frac{\partial a_i}{\partial t}\right)_\xi+La_i,\tag{7.27}$$

где L — так называемая *производная Ли* [13]:

$$La^i\equiv v^j\nabla_j a^i-a^j\nabla_j v^i,\quad La_i\equiv v^j\nabla_j a_i+a_j\nabla_i v^j.\tag{7.28}$$

Упражнение 7.5. Показать, что для тензора

$$\underset{\sim}{b}=B^{i_1\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot i_2}\vec{e}_{i_1}\otimes\vec{e}^{\,i_2}\otimes\vec{e}_{i_3}\otimes\ldots\otimes\vec{e}_{i_n},\tag{7.29}$$

$$\underset{\sim}{B}=B^{i_1\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot i_2}\vec{E}_{i_1}\otimes\vec{E}^{i_2}\otimes\vec{E}_{i_3}\otimes\ldots\otimes\vec{E}_{i_n}=$$

$$=b^{i_1\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot i_2}\vec{э}_{i_1}\otimes\vec{э}^{i_2}\otimes\vec{э}_{i_3}\otimes\ldots\otimes\vec{э}_{i_n}\tag{7.30}$$

справедливо

$$\left(\frac{\partial B^{i_1\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot i_2}}{\partial t}\right)_\alpha=\left(\frac{\partial b^{i_1\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot i_2}}{\partial t}\right)_\xi+Lb^{i_1\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot i_2},\tag{7.31}$$

где

$$Lb^{i_1\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot i_2}\equiv v^j\nabla_j b^{i_1\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot i_2}-b^{j\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot i_2}\nabla_j v^{i_1}+$$

$$+b^{i_1\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot j}\nabla_{i_2}v^j-\ldots-b^{i_1\cdot i_3\ldots i_{n-1}j}_{\cdot i_2}\nabla_j v^{i_n}.\tag{7.32}$$

Полученные выражения упрощаются, если соотношения (7.2) описывают движение среды как жесткого целого. Положим, например,

$$\vec{R}(t)=\vec{R}_0(t)+\underset{\sim}{Q}(t)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0),\tag{7.33}$$

где $\underset{\sim}{Q}$ — ортогональный тензор:

$$\underset{\sim}{\tilde{Q}}=\underset{\sim}{Q}^{-1},\quad \underset{\sim}{Q}\cdot\underset{\sim}{\tilde{Q}}=\underset{\sim}{\mathcal{I}},\tag{7.34}$$

а $\vec{R}_0$ — радиус-вектор некоторой точки, которой в начальный момент t соответствует точка с радиус-вектором $\vec{r}$.

Дифференцируя (7.33) по времени, получаем

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\frac{d\underset{\sim}{Q}}{dt}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0). \qquad (7.35)$$

Выражая согласно (7.34) $\vec{r}-\vec{r}_0$ через $\vec{R}-\vec{R}_0$ из (7.33)

$$\vec{r}-\vec{r}_0=\underset{\sim}{\tilde{Q}}\cdot(R-R_0) \qquad (7.36)$$

и подставляя в (7.35), получим

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\frac{d\underset{\sim}{Q}}{dt}\cdot\underset{\sim}{Q}\cdot(\vec{R}-\vec{R}_0). \qquad (7.37)$$

Согласно (7.34)

$$\frac{d\underset{\sim}{Q}}{dt}\cdot\underset{\sim}{\tilde{Q}}+\underset{\sim}{Q}\cdot\frac{d\underset{\sim}{\tilde{Q}}}{dt}=0 \qquad (7.38)$$

и поэтому тензор $\underset{\sim}{S}$

$$\underset{\sim}{S}\equiv\underset{\sim}{Q}\cdot\frac{d\underset{\sim}{\tilde{Q}}}{dt}=-\frac{d\underset{\sim}{Q}}{dt}\cdot\tilde{Q} \qquad (7.39)$$

является антисимметричным. Следовательно (см. (2.35), (2.36) гл. 3), с ним можно однозначно связать осевой вектор $\vec{\omega}$:

$$S^{ij}=\frac{1}{\sqrt{G}}\epsilon^{kij}\omega_k,\quad \omega_k=2\sqrt{G}\,\epsilon_{klm}S^{lm}. \qquad (7.40)$$

Тогда соотношение (7.37) можно переписать в виде

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{\omega}\times(\vec{R}-\vec{R}_0), \qquad (7.41)$$

что соответствует известной теореме Эйлера в теоретической механике.

Из (7.33) следует, что

$$\vec{E}_i\equiv\frac{\partial\vec{R}}{\partial\alpha^i}=Q_{i\cdot}^{\cdot j}\vec{e}_j, \qquad (7.42)$$

поэтому, дифференцируя по t соотношение (7.5)

$$\vec{A}=A^i\vec{E}_i=A^iQ_{i\cdot}^{\cdot j}\vec{e}_j, \qquad (7.43)$$

получим

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{dA^i}{dt}\vec{E}_i+A_i\frac{d\vec{E}_i}{dt}=\frac{dA^i}{dt}\vec{E}_i+A^i\frac{dQ_{i\cdot}^{\cdot j}}{dt}\vec{e}_j=$$

$$=\frac{dA^i}{dt}\vec{E}_i+A^i\frac{dQ_{i\cdot}^{\cdot j}}{dt}Q_{\cdot j}^{k\cdot}\vec{E}_k=\frac{dA^i}{dt}\vec{E}_i-A^iS_{i\cdot}^{\cdot k}\vec{E}_k=$$

$$=\frac{d\vec{A}_1}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{A},\quad \frac{d\vec{A}_1}{dt}\equiv\frac{dA^i}{dt}\vec{E}_i. \qquad (7.44)$$

Производные по параметру, вычисленные в подвижной системе координат, когда вектор скорости имеет вид (7.41), называются *производными Яумана* [10].

Вектор $\vec{\omega}$ при этом может быть связан с некоторым тензором второго ранга согласно так называемой *теореме о полярном разложении*.

Упражнение 7.6. Доказать, что всякий невырожденный тензор второго ранга $\underset{\sim}{b}=b^{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$ может быть представлен в виде произведения

$$\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{Q}\cdot\underset{\sim}{S}=\underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{Q}, \qquad (7.45)$$

где $\underset{\sim}{Q}$ — ортогональный тензор, а $\underset{\sim}{S}$ и $\underset{\sim}{T}$ положительно-определенные симметричные тензоры, однозначно определяемые тензором $\underset{\sim}{b}$, причем

$$\underset{\sim}{T}=\underset{\sim}{Q}\cdot\underset{\sim}{S}\cdot\underset{\sim}{\tilde{Q}},\quad \underset{\sim}{S}=\underset{\sim}{\tilde{Q}}\cdot\underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{Q}, \qquad (7.46)$$

$$\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{\tilde{b}}=\underset{\sim}{T}^2,\quad \underset{\sim}{\tilde{b}}\cdot\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{S}^2,\quad \underset{\sim}{Q}=\underset{\sim}{T}^{-1}\cdot\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{S}^{-1}, \qquad (7.47)$$

где $\underset{\sim}{T}^{-1}$ — тензор, обратный к $\underset{\sim}{T}$, а $\underset{\sim}{S}^{-1}$ — обратный к $\underset{\sim}{S}$.