РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО

§ 1. Элементарное многообразие

До сих пор мы задавали криволинейную систему координат евклидова пространства $\mathcal{R}_3$ введением радиус-вектора

$$\vec{r}=\vec{r}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \tag{1.1}$$

с отличным от нуля якобианом

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^3}\right| \neq 0, \tag{1.2}$$

т. е. предполагали, что существует некоторая декартова система координат с базисом $\vec{k}_i$, общим для всего пространства $\mathcal{R}_3$.

Собственно говоря, такое пространство иазывается *аффинным*, а евклидовым оно становится после введения соответствующей «метрики»

$$g_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j, \tag{1.3}$$

где

$$\vec{e}_i=\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i} \tag{1.4}$$

векторы локального репера. В локальном репере, вообще говоря, уже невозможно представить радиус-вектор $\vec{r}$, так как он принадлежит «целиком всему пространству $\mathcal{R}_3$», а локальный базис «ответствен» только за бесконечно малую окрестность некоторой точки M пространства $\mathcal{R}_3$.

Под заданием вектора $\vec{a}$ в пространстве $\mathcal{R}_3$ мы понимали задание векторного поля $\vec{a}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$, т. е. в каждой точке M пространства $\mathscr{R}_3$ рассматрнвался вектор $\vec{a}$ как объект алгебраического векториого простраиства, «пришпиленного» в точке M и порождаемого векторами локального базиса $\vec{e}_i$. Поэтому в каждой точке M вектор $\vec{a}$ мы раскладывали по векторам базнса $\vec{e}_i$ или взаимного с ним базиса $\vec{e}^i$:

$$\vec{a}=a^i\vec{e}_i=a_i\vec{e}^i. \tag{1.5}$$

Для достаточно гладкого векторного поля $\vec{a}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ его частные производные $\partial\vec{a}/\partial\alpha^i$ выражались через векторы локального репера

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\alpha^i}=a^j{}_{,i}\,\vec{e}_j\equiv\nabla_i a^j\,\vec{e}_j \tag{1.6}$$

в силу того, что из формул (1.1), (1.3) можно было вычислить изменение векторов локального репера

$$\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial\alpha^j}=\Gamma_{ij}^k\vec{e}_k, \tag{1.7}$$

при этом

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial\alpha^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial\alpha^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial\alpha^l}\right). \tag{1.8}$$

Разумеется, все сказанное для векторов, т. е. тензоров первого порядка, справедливо и для тензоров более высокого порядка. С введением новой системы координат $\alpha^{1'}, \alpha^{2'}, \alpha^{3'}$ (гл. 1, § 2), мы устанавливали закон перехода компонент различных геометрических объектов при переходе от нештрихованной системы криволинейных координат α^1, α^2, α^3 к штрихованной $\alpha^{1'}, \alpha^{2'}, \alpha^{3'}$.

Подчеркнем еще раз, что всюду мы пользовались следующим обстоятельством: криволинейная система координат вводится формулами (1.1), т. е. законом перехода от некоторой декартовой системы координат.

Откажемся теперь от выделения среди координатных систем особенной (декартовой) и будем считать все системы равноправными. Тогда совокупность точек M перестает быть евклидовым и даже аффинным пространством и становится некоторым абстрактным множеством, которое наделяется теми или иными геометрическими свойствами. Не будем вдаваться в подробности определения многообразия, являющегося важным понятием дифференциальной геометрии, а дадим только не вполне строгое определение, которое позволит нам в дальнейшем рассмотреть некоторые свойства *римановых пространств*, широко используемых в современной механике.

Назовем *элементарным многообразием n* измерений класса D некоторое множество U_n, для которого задано взаимно-однозначное отображение на связную область изменения n переменных $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ с точностью до произвольного преобразования этих переменных:

$$\alpha^{i'} = \alpha^{i'}(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n), \tag{1.9}$$

$$\alpha^{i} = \alpha^{i}(\alpha^{1'}, \alpha^{2'}, \ldots, \alpha^{n'}), \tag{1.10}$$

при этом функции (1.9) и (1.10) считаются достаточное число раз дифференцируемыми.

Из разрешимости уравнений (1.9) в виде (1.10) и обратно видим, что якобиевы матрицы

$$A^{i'}{}_{i} \equiv \frac{\partial \alpha^{i'}}{\partial \alpha^{i}}, \quad B^{i}{}_{i'} \equiv \frac{\partial \alpha^{i}}{\partial \alpha^{i'}} \; (i, i' = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.11}$$

являются взаимно обратными

$$A^{i'}{}_{i} B^{i}{}_{j'} = \delta^{i'}{}_{j'}, \quad B^{i}{}_{i'} A^{i'}{}_{j} = \delta^{i}{}_{j}, \tag{1.12}$$

так что определители этих матриц отличны от нуля.

Элементы множества $\mathfrak{M}$ назовем точками M элементарного многообразия, отображения

$$M \leftrightarrow (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n) \tag{1.13}$$

координатными системами этого *многообразия*, а значения $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$, отвечающие точке M в отображении (1.3), — координатами точки M в соответствующей координатной системе.

В соответствии с введенным определением рассмотрим некоторые свойства многообразий. Будем говорить, что в многообразии задана кривая, если задано множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$\alpha^i = f^i(t), \tag{1.14}$$

где t — некоторый параметр, а f^i — совокупность n функций. Зададим теперь множество точек, удовлетворяющих уравнениям

$$\alpha^i = f^i(u^1, u^2, \ldots, u^m), \tag{1.15}$$

где $u^1, u^2, \ldots, u^m$ являются параметрами, а число $m<n$.

Совокупность этих точек назовем *подмножеством $\mathscr{V}_m$ множества $\mathscr{V}_n$*. При $m=n-1$ это *подмножество может быть названо поверхностью в $\mathscr{V}_n$*, ибо обладает свойством поверхности делить все пространство $\mathscr{V}_n$ на две части. В самом деле, из (1.15) при $m=n-1$ следует, что можно исключить из $(n-1)$-го уравнения параметры $u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}$ и получить вместо (1.15) одно уравнение

$$\varphi(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n) = 0. \tag{1.16}$$

Находящаяся в соседстве с $\mathscr{V}_{n-1}$ часть пространства $\mathscr{V}_n$ делится на две части, для которых функция φ является положительной или отрицательной. Часть $\mathscr{V}_{n-1}$ называется *гиперповерхностью*.

Упражнение 1.1. Параметрическое задание гиперповерхности в $\mathscr{V}_n$ имеет вид

$$\begin{aligned}
&\alpha^1 = \cos u^1,\\
&\alpha^2 = \sin u^1 \cos u^2,\\
&\alpha^3 = \sin u^1 \sin u^2 \cos u^3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha^{n-1} = \sin u^1 \sin u^2 \sin u^3 \ldots \sin u^{n-2} \cos u^{n-1},\\
&\alpha^n = \sin u^1 \sin u^2 \sin u^3 \ldots \sin u^{n-2} \sin u^{n-1}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Найти единственное уравнение этой поверхности в виде (1.16) и проверить, точки $\left(\frac{1}{k}, 0, 0, \ldots, 0\right)$ и $(0, 0, 0, \ldots, k)$ (где k — некоторое положительное число) лежат по одну или по разные стороны от этой поверхности. ●

Рассмотрим в каждой точке M многообразия $\mathscr{V}_n$ различного рода экстенсивы (гл. 1, § 3) и аналогично тому, как это было сделано ранее, определим алгебраические операции, производимые над ними. Среди этих экстенсивов выделим относительные и абсолютные тензоры и псевдотензоры (гл. 3, § 3). При этом назовем, как это принято в литературе, тензором, m раз ковариантным и k раз контравариантным, совокупность $(m+k)^n$ величин $T_{i_1 \ldots i_m}{}^{j_1 \ldots j_k}(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$, преобразующихся при переходе от одной системы координат к другой (1.9) по закону

$$T_{i'_1 \dots i'_m}{}^{j'_1 \dots j'_k} = B_{i'_1}{}^{i_1} \dots B_{i'_m}{}^{i_m} A^{j'_1}{}_{j_1} \dots A^{j'_k}{}_{j_k} T_{i_1 \dots i_m}{}^{j_1 \dots j_k}. \tag{1.18}$$

Рассмотрим некоторую кривую (1.14) в $\mathscr{V}_n$ и закон преобразования от одной системы координат к другой (1.9). Тогда в точке M мы имеем

$$d\alpha^{i'} = A^{i'}{}_i d\alpha^i, \tag{1.19}$$

т. е. дифференциалы $d\alpha^i$ являются контравариантными компонентами тензора 1-го ранга. Пусть в $\mathscr{V}_n$ выбрана какая-то система координат, которая хотя и не отличается от любой другой, но фиксирована. Например, это система $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$. В силу невырожденности матриц $A^{i'}{}_i(M)$ в каждой точке M многообразия $\mathscr{V}_n$ элементы матрицы $A_i^{i'}$ можно трактовать как i'-компоненты векторов локального репера $\vec{e}_i(M)$. Тогда в каждой точке M на эти векторы репера можно натянуть векторное пространство $\mathscr{R}_n(M)$, которое было подробно изучено в предыдущих главах.

Итак, всякое многообразие $\mathscr{V}_n$ порождает континуальную систему векторных пространств $\mathscr{R}_n(M)$, причем в каждом из них имеется «особый» базис $\vec{e}_i$ в том смысле, что порожден выбором некоторой системы координат $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ во всем многообразии $\mathscr{V}_n$.

Для того чтобы связать между собой различные пространства $\mathscr{R}_n(M_1)$ и $\mathscr{R}_n(M_2)$, необходимо снабдить многообразие $\mathscr{V}_n$ дополнительными свойствами *связности*. Мы не будем здесь касаться этого вопроса. Заметим только, что если в каждом евклидовом пространстве мы умели подсчитывать расстояние между любыми двумя точками и определять углы между двумя любыми прямыми, исходящими из одной точки, то для многообразия само понятие прямых и расстояния между двумя точками нуждается в определении. Так, если бы существовали двумерные создания, живущие, например, на поверхности, показанной на рис. 12, то мы с высоты своего «трехмерного» положения могли бы заметить, что у двумерных созданий отсутствуют прямые в нашем смысле, а линейки, которыми они пытаются измерять расстояния между двумя точками, с нашей точки зрения являются кривыми (рис. 12). Возникает вопрос, сумели бы эти двумерные создания измерениями в двумерном мире догадаться, что они живут в «кривом» пространстве, и установить меру искривленности этого пространства?

Аналогичные вопросы могут возникнуть и возникают в пространствах большего числа измерений, и

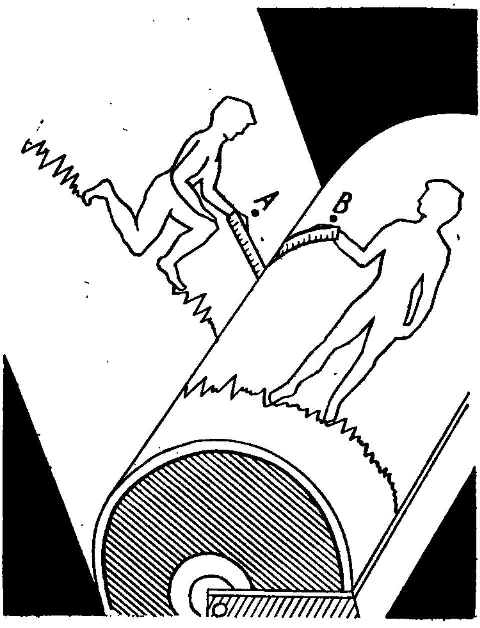

Рис. 12

для того чтобы на них ответить, нужно иаучиться определять расстояния между двумя точками и другие величины, не пользуясь введением прямоугольной декартовой системы координат, которой (как мы видим из приведенного двумерного примера) может и ие существовать.

Упражнение 1.2. Дифференцированием соотношений (1.12) доказать тождества

$$\frac{\partial^2 \alpha^{l'}}{\partial \alpha^j \partial \alpha^k} + \frac{\partial^2 \alpha^l}{\partial \alpha^{j'} \partial \alpha^{k'}} A^{j'}{}_j A^{k'}{}_k A^{l'}{}_l = 0, \qquad (1.20)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha^i}{\partial \alpha^{j'} \cdot \partial \alpha^{k'}} + \frac{\partial^2 \alpha^{i'}}{\partial \alpha^j \partial \alpha^k} B^j{}_{j'} B^k{}_{k'} B^i{}_{i'} = 0. \qquad (1.21)$$

Упражнение 1.3. Доказать, что если все компоненты тензора в одной системе координат обращаются в нуль, то они равны нулю во всех других системах координат.

§ 2. Метрический тензор

Попытаемся ввести понятие расстояния между двумя точками многообразия, причем, разумеется, такое понятие должно быть пригодно, в частности, для описания расстояния в евклидовом пространстве $\mathscr{R}_3$, а также расстояния на поверхности в трехмерном евклидовом пространстве.

Будем говорить, что пространство $\mathscr{V}_n$ является *пространством Римана,* если в нем задана фундаментальная (метрическая) форма

$$\Phi = g_{ij} d\alpha^i d\alpha^j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2.1)$$

т. е. некая скалярная функция точки M пространства $\mathscr{V}_n$. Очевидно, тем самым задан симметричный метрический (фундаментальный) тензор второго порядка, ковариантные компоненты которого есть величины g_{ij}.

Можно определить теперь расстояние между двумя бесконечно близкими точками $\mathscr{V}_n$ равенством

$$ds^2 = \Phi. \qquad (2.2)$$

Однако в евклидовом пространстве форма (2.1) является положительно-определенной, т. е. она положительна для всех $d\vec{r} \neq 0$, и расстояние между двумя точками равно нулю только в том случае, если эти точки совпадают. При определении риманова пространства мы не требуем положительной определенности формы (2.1). Следовательно, может случиться, например, что

$$\Phi = (d\alpha^1)^2 - (d\alpha^2)^2, \qquad (2.3)$$

т. е. метрическая форма обращается в нуль при

$$d\alpha^1 = d\alpha^2. \qquad (2.4)$$

Итак, для некоторых направлений форма Φ явля-