$$\frac{\partial^2 \alpha^{l'}}{\partial \alpha^j \partial \alpha^k} + \frac{\partial^2 \alpha^l}{\partial \alpha^{j'} \partial \alpha^{k'}} A^{j'}{}_j A^{k'}{}_k A^{l'}{}_l = 0, \qquad (1.20)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha^i}{\partial \alpha^{j'} \cdot \partial \alpha^{k'}} + \frac{\partial^2 \alpha^{i'}}{\partial \alpha^j \partial \alpha^k} B^j{}_{j'} B^k{}_{k'} B^i{}_{i'} = 0. \qquad (1.21)$$

Упражнение 1.3. Доказать, что если все компоненты тензора в одной системе координат обращаются в нуль, то они равны нулю во всех других системах координат.

§ 2. Метрический тензор

Попытаемся ввести понятие расстояния между двумя точками многообразия, причем, разумеется, такое понятие должно быть пригодно, в частности, для описания расстояния в евклидовом пространстве $\mathcal{R}_3$, а также расстояния на поверхности в трехмерном евклидовом пространстве.

Будем говорить, что пространство $\mathcal{V}_n$ является *пространством Римана,* если в нем задана фундаментальная (метрическая) форма

$$\Phi = g_{ij} d\alpha^i d\alpha^j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2.1)$$

т. е. некая скалярная функция точки M пространства $\mathcal{V}_n$. Очевидно, тем самым задан симметричный метрический (фундаментальный) тензор второго порядка, ковариантные компоненты которого есть величины g_{ij}.

Можно определить теперь расстояние между двумя бесконечно близкими точками $\mathcal{V}_n$ равенством

$$ds^2 = \Phi. \qquad (2.2)$$

Однако в евклидовом пространстве форма (2.1) является положительно-определенной, т. е. она положительна для всех $d\vec{r} \neq 0$, и расстояние между двумя точками равно нулю только в том случае, если эти точки совпадают. При определении риманова пространства мы не требуем положительной определенности формы (2.1). Следовательно, может случиться, например, что

$$\Phi = (d\alpha^1)^2 - (d\alpha^2)^2, \qquad (2.3)$$

т. е. метрическая форма обращается в нуль при

$$d\alpha^1 = d\alpha^2. \qquad (2.4)$$

Итак, для некоторых направлений форма Φ является положительной, для других — отрицательной. Направления типа (2.4), где метрическая форма Φ обращается в нуль, называются *изотропными направлениями.* Для каждого неизотропного направления существует *знаковое число* ε, равное либо $+1$, либо -1, такое, что форма $\varepsilon\Phi$ является положительной. Введение знакового числа позволит нам избежать трудности определения расстояния между двумя точками с помощью неопределенной формы.

Расстоянием между двумя бесконечно близкими точками в направлении $d\alpha^i$ называется величина

$$ds^2=\varepsilon\Phi=\varepsilon g_{ij}d\alpha^i d\alpha^j, \quad ds>0. \tag{2.5}$$

Расстояние между двумя бесконечно близкими точками в изотропном направлении считаем нулевым, т. е. в римановом пространстве расстояние между двумя точками может быть равно нулю даже в том случае, если эти точки не совпадают.

Заметим, что риманова геометрия конструируется с помощью понятия расстояния между двумя бесконечно близкими точками, а не точками, удаленными между собой на конечное расстояние. Так как в каждой точке M риманова пространства имеется фундаментальная матрица g_{ij}, то с ее помощью можно построить в каждой точке M *касательное евклидово пространство* с базисом $\vec{e}_i$, таким, что

$$g_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j. \tag{2.6}$$

Следовательно, направление, рассмотренное при определении (2.5), в касательном евклидовом пространстве может трактоваться как вектор

$$\vec{dr}=d\alpha^i\vec{e}_i. \tag{2.7}$$

Предположим, что определитель фундаментальной матрицы g_{ij} в каждой точке M отличен от нуля, т. е.

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}\neq 0. \tag{2.8}$$

Тогда в каждой точке M существует матрица g^{ij}, обратная к g_{ij}, т. е.

$$g_{ij}g^{jk}=\delta_i{}^k, \quad g^{ij}g_{jk}=\delta^i{}_k. \tag{2.9}$$

С помощью величин g_{ij} и g^{ij} можно производить жонглирование индексами (гл. 1, § 1)

$$T^{ij}=T^i{}_k g^{kj}, \quad T^j{}_k=g_{ki}T^{ij}. \tag{2.10}$$

В каждом касательном евклидовом пространстве можно, таким образом, построить векторы взаимного репера $\vec{e}^i$

$$\vec{e}^i=g^{ij}\vec{e}_j. \tag{2.11}$$

Упражнение 2.1. Доказать, что

$$g^{ij}=g^{ji}. \tag{2.12}$$

Упражнение 2.2. Доказать, что величины g^{ij} преобразуются при переходе от одной системы координат к другой как контравариантные компоненты тензора второго ранга.

Упражнение 2.3. Доказать, что

$$g_{ij}g^{ij}=n. \tag{2.13}$$

Упражнение 2.4. Доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^k}\ln g=g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial\alpha^k}. \tag{2.14}$$

Упражнение 2.5. Найти смешанный метрический тензор $g_i{}^j$, который получается из g_{ij} подниманием второго индекса. ●

Если величины a^i при переходе от одной системы координат к другой (1.9) преобразуются по закону

$$a^{i'}=A^{i'}{}_i a^i, \tag{2.15}$$

то будем говорить, что в каждом касательном пространстве задан вектор

$$\vec{a}=a^i\vec{e}_i. \tag{2.16}$$

Если этот вектор не является изотропным, то его длину можно подсчитать по формуле

$$|\vec{a}|=\sqrt{\varepsilon g_{ij}a^ia^j}. \tag{2.17}$$

Рассмотрим теперь кривую (1.14) в римановом пространстве $\mathscr{V}_n$. Положим

$$\tau^j=\frac{df^j(t)}{dt}. \tag{2.18}$$

Тогда бесконечно малое смещение вдоль кривой (1.14) имеет вид

$$d\alpha^i = \tau^i(t)\,dt \tag{2.19}$$

и длина этого смещения определится формулой

$$ds = \sqrt{\varepsilon g_{ij}\tau^i\tau^j}\,dt, \tag{2.20}$$

так что длину кривой (1.14) от точки $t=t_1$ до точки $t=t_2$ можно подсчитать следующим образом:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varepsilon g_{ij}\tau^i\tau^j}\,dt. \tag{2.21}$$

Следовательно, чтобы найти длину кривой (1.14) в пространстве $\mathscr{V}_n$, необходимо знать, как устроено это пространство, т. е. знать его метрический тензор. Так, например, если в $\mathscr{V}_3$ дано

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= a\cos t, \\ \alpha^2 &= a\sin t, \\ \alpha^3 &= bt \end{aligned} \tag{2.22}$$

и метрическая форма имеет вид

$$ds^2 = (d\alpha^1)^2 + (d\alpha^2)^2 + (d\alpha^3)^2, \tag{2.23}$$

то согласно формуле (2.21) длина кривой от точки $t=0$ до точки $t=2\pi$ равна

$$s = \int_0^{2\pi} (a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2)^{1/2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}. \tag{2.24}$$

Если же метрическая форма имеет вид

$$ds^2 = (d\alpha^1)^2 + (d\alpha^2)^2 - (d\alpha^3)^2, \tag{2.25}$$

то из (2.22) следует

$$s = \begin{cases} 2\pi\sqrt{a^2-b^2}, & \text{если } |a|>|b|, \\ 2\pi\sqrt{b^2-a^2}, & \text{если } |a|<|b|, \\ 0, & \text{если } |a|=|b|. \end{cases} \tag{2.26}$$

Из (2.26) следует, что в случае $a=b$ кривая (2.22) в пространстве $\mathscr{V}_3$ с метрикой (2.25) является изотропной. В случае, если кривая (1.14) не изотропна, за параметр кривой можно выбрать длину дуги s.

Тогда из формулы (2.5) находим, что

$$\varepsilon g_{ij}\frac{d\alpha^i}{ds}\frac{d\alpha^j}{ds}=1. \tag{2.27}$$

Следовательно, вектор

$$\tau^i=\frac{d\alpha^i}{ds} \tag{2.28}$$

единичный вектор, касательный к кривой (1.14).

Для того чтобы определить угол между двумя кривыми в некоторой точке M, предположим, что метрическая форма является положительно-определенной. И пусть τ^i и σ^i — два единичных вектора, касательных к рассматриваемым кривым в точке M. Тогда назовем углом между этими кривыми угол β, для которого

$$\cos\beta=g_{ij}\tau^i\sigma^j. \tag{2.29}$$

Заметим, что для векторов $\vec{\tau}$ и $\vec{\sigma}$

$$\vec{\tau}=\tau^i\vec{e}_i,\quad \vec{\sigma}=\sigma^j\vec{e}_j \tag{2.30}$$

касательного пространства точки M косинус угла между ними находится также по формуле (2.29). Определение (2.29) будет иметь смысл, если

$$|g_{ij}\tau^i\sigma^j|\leqslant 1. \tag{2.31}$$

Так как метрическая форма положительно-определена, то для любого числа λ

$$g_{ij}(\tau^i+\lambda\sigma^i)(\tau^j+\lambda\sigma^j)\geqslant 0. \tag{2.32}$$

Раскрывая в (2.32) скобки и учитывая, что векторы τ^i и σ^i единичные, получим

$$1+2\lambda g_{ij}\tau^i\sigma^j+\lambda^2\geqslant 0. \tag{2.33}$$

Дополняя левую часть до полного квадрата, получим тождество

$$(\lambda+g_{ij}\tau^i\sigma^j)^2+[1-(g_{ij}\tau^i\sigma^j)^2]\geqslant 0, \tag{2.34}$$

откуда следует (2.31).

Можно, разумеется, принять за определение угла между кривыми выражения (2.29) и для случая неопределенной метрической формы, но в этом случае угол может оказаться мнимым. Тем ие менее вне зависимости от того, определена или не определена метрическая форма, считаем, что векторы a^i, b^i ортогональны между собой, если

$$g_{ij}a^i b^j = 0. \tag{2.35}$$

Упражнение 2.6. Доказать, что вектор, получаемый дифференцированием единичного вектора τ^i по параметру кривой t (1.14), ортогонален к самому вектору τ^i.

§ 3. Геодезические линии

В евклидовом трехмерном пространстве понятие прямой входит в основное, неопределяемое понятие. Однако, исходя из задания линейного элемента, прямую в евклидовом пространстве можно определить как кратчайшее расстояние между двумя точками.

Переходя к обобщенному понятию прямой в римановом пространстве $\mathscr{V}_n$, обратим внимание, что на двумерных поверхностях трехмерного евклидова пространства существуют кривые, соединяющие две точки, наименьшей длины. Таковы, например, окружности максимального радиуса на сфере. Линия, имеющая минимальную длину среди всех линий, соединяющих две заданные точки риманова пространства $\mathscr{V}_n$ (если она существует), называется *геодезической линией*.

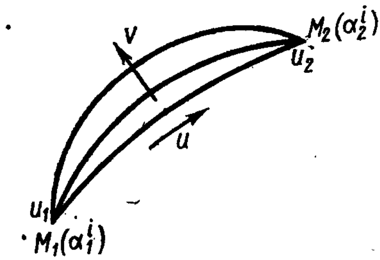

Рис. 13

Пусть некоторая кривая, соединяющая две точки M_1 и M_2, задается параметрически в виде

$$\alpha^i = \alpha^i(u), \quad u_1 \leqslant u \leqslant u_2. \tag{3.1}$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство кривых, соединяющих точки M_1 и M_2 и принадлежащих $\mathscr{V}_n$ (рис. 13):

$$\alpha^i = \alpha^i(u, v). \tag{3.2}$$

Для каждой кривой указанного семейства выполняются условия

$$\alpha^i(u_1, v) = \alpha_1{}^i, \quad \alpha^i(u_2, v) = \alpha_2{}^i. \tag{3.3}$$

Зафиксировав параметр v, получим одну из кривых