нальны между собой, если

$$g_{ij}a^ib^j=0. \tag{2.35}$$

Упражнение 2.6. Доказать, что вектор, получаемый дифференцированием единичного вектора τ^i по параметру кривой t (1.14), ортогонален к самому вектору τ^i.

§ 3. Геодезические линии

В евклидовом трехмерном пространстве понятие прямой входит в основное, неопределяемое понятие. Однако, исходя из задания линейного элемента, прямую в евклидовом пространстве можно определить как кратчайшее расстояние между двумя точками.

Переходя к обобщенному понятию прямой в римановом пространстве $\mathscr{V}_n$, обратим внимание, что на двумерных поверхностях трехмерного евклидова пространства существуют кривые, соединяющие две точки, наименьшей длины. Таковы, например, окружности максимального радиуса на сфере. Линия, имеющая минимальную длину среди всех линий, соединяющих две заданные точки риманова пространства $\mathscr{V}_n$ (если она существует), называется *геодезической линией.*

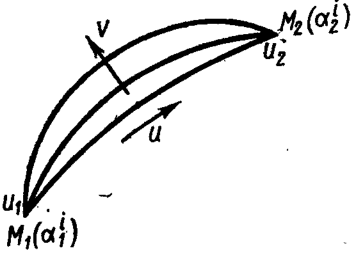

Рис. 13

Пусть некоторая кривая, соединяющая две точки M_1 и M_2, задается параметрически в виде

$$\alpha^i=\alpha^i(u), \quad u_1\leqslant u\leqslant u_2. \tag{3.1}$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство кривых, соединяющих точки M_1 и M_2 и принадлежащих $\mathscr{V}_n$ (рис. 13):

$$\alpha^i=\alpha^i(u, v). \tag{3.2}$$

Для каждой кривой указанного семейства выполняются условия

$$\alpha^i(u_1, v)=\alpha_1{}^i, \ \alpha^i(u_2, v)=\alpha_2{}^i. \tag{3.3}$$

Зафиксировав параметр v, получим одну из кривых

(3.1) семейства (3.2). Обозначим через $L(v)$ длину каждой кривой семейства и будем считать, что $L(0)$ — наименьшее из значений $L(v)$, т. е. кривая со значением параметра $v=0$ имеет наименьшую длину, другими словами, функция $L(v)$ имеет минимум в точке $v=0$.

Так как длину каждой кривой семейства можно подсчитать по формуле (2.21), то имеем

$$L(v)=\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{\varepsilon g_{ij}\tau^i\tau^j}\,du. \tag{3.4}$$

Обозначим

$$w\equiv g_{ij}\tau^i\tau^j. \tag{3.5}$$

Тогда для каждой кривой семейства

$$L=\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{\varepsilon w}\,du, \tag{3.6}$$

где w зависит от координат пространства α^i и от направления кривой τ^i. Для того, чтобы отыскать экстремум функции $L(v)$, нужно решить уравнение

$$\frac{\partial L}{\partial v}=0. \tag{3.7}$$

Из (3.6) имеем

$$\frac{\partial L}{\partial v}=\int_{u_1}^{u_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha^i}\sqrt{\varepsilon w}\,\frac{\partial\alpha^i}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial\tau^i}\sqrt{\varepsilon w}\,\frac{\partial\tau^i}{\partial v}\right]du. \tag{3.8}$$

Очевидно, τ^i выражаются через координаты α^i

$$\frac{\partial\tau^i}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial\alpha^i}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial\alpha^i}{\partial v}. \tag{3.9}$$

Поэтому, интегрируя по частям (3.8) и учитывая (3.3), получнм

$$\frac{\partial L}{\partial v}=\int_{u_1}^{u_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha^i}\sqrt{\varepsilon w}\,\frac{\partial\alpha^i}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial\tau^i}\sqrt{\varepsilon w}\,\frac{\partial\alpha^i}{\partial v}\right]du=$$

$$=-\int_{u_1}^{u_2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial\tau^i}\sqrt{\varepsilon w}-\frac{\partial}{\partial\alpha^i}\sqrt{\varepsilon w}\right]\frac{\partial\alpha^i}{\partial v}\,du. \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.7) и учитывая, что $\frac{\partial \alpha^i}{\partial v}$ — произвольные функции u, получим для искомой кривой уравнение

$$\frac{d}{du}\frac{\partial}{\partial \tau^i}\sqrt{\varepsilon \omega}-\frac{\partial}{\partial \alpha^i}\sqrt{\varepsilon \omega}=0. \tag{3.11}$$

Упражнение 3.1. Убедиться, что уравнение (3.11) эквивалентно уравнению

$$\frac{d}{du}\frac{\partial \omega}{\partial \tau^i}-\frac{\partial \omega}{\partial \alpha^i}=\frac{1}{2\omega}\frac{d\omega}{du}\frac{\partial \omega}{\partial \tau^i}. \quad \bullet \tag{3.12}$$

В соотношениях (3.11) и (3.12) $v=0$, т. е. α^i — координаты искомой геодезической линии. Если эта кривая неизотропная, то можно считать параметром u, характеризующим эту кривую, длину дуги s ($u=s$). Тогда

$$\tau^i=\frac{d\alpha^i}{ds},\ \omega=g_{ij}\tau^i\tau^j=\varepsilon,\ \frac{d\omega}{dv}=\frac{d\omega}{ds}=0. \tag{3.13}$$

Поэтому из (3.12) следует

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial \omega}{\partial \tau^i}-\frac{\partial \omega}{\partial \alpha^i}=0. \tag{3.14}$$

Подставляя выражение (3.5) в (3.14), получим

$$\frac{d}{ds}(2g_{kj}\tau^j)-\frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k}\tau^i\tau^j=0, \tag{3.15}$$

откуда

$$g_{kj}\frac{d\tau^j}{ds}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial \alpha^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k}\right)\tau^i\tau^j=0. \tag{3.16}$$

Назовем символами Кристоффеля 1-го рода величины

$$\Gamma_{ij,k}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial \alpha^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k}\right). \tag{3.17}$$

Символами Кристоффеля 2-го рода называются величины, образованные из (3.17) следующим образом:

$$\Gamma_{ij}{}^{l}=g^{lk}\Gamma_{ij,k}. \tag{3.18}$$

Тогда уравнения (3.16) можно записать в виде

$$g_{kj}\frac{d\tau^j}{ds}+\Gamma_{ij,k}\tau^i\tau^j=0. \tag{3.19}$$

Умножая (3.19) на g^{lk} и суммируя по k от 1 до n, получим

$$\frac{d\tau^l}{ds} + \Gamma_{ij}^{l}\tau^i\tau^j = 0. \tag{3.20}$$

Подставляя в (3.20) первую формулу (3.13), получим

$$\frac{d^2\alpha^l}{ds^2} + \Gamma_{ij}^{l}\frac{d\alpha^i}{ds}\frac{d\alpha^j}{ds} = 0. \tag{3.21}$$

Итак, мы нашли дифференциальные уравнения для определения геодезических линий, которые имеют различную форму записи: (3.11), (3.12), (3.14), (3.19)—(3.21), причем в последних трех формах записи предполагается отсутствие в каждой точке кривой изотропного направления, ибо в противоположном случае следовало бы положить $ds=0$ и уравнения (3.19) — (3.21) потеряли бы смысл.

Отметим также, что система дифференциальных уравнений (3.21) имеет второй порядок. Ее решение $\alpha^i(s)$ будет определено однозначно, если заданы начальные условия α^l и $\frac{d\alpha^l}{ds}$. Геометрически это означает, что геодезическая линия определена однозначно, если задана некоторая точка M и направление касательной к ней в этой точке. Например, в евклидовом пространстве $\mathcal{R}_n$ метрический тензор является единичным тензором. Поэтому из (3.17) и (3.18) следует, что все символы Кристоффеля 2-го рода равны нулю и решение уравнений (3.21) имеет вид

$$\alpha^l = C_1{}^l s + C_2{}^l, \tag{3.22}$$

где $C_1{}^l$ и $C_2{}^l$ — некоторые постоянные.

Упражнение 3.2. Доказать равенства

$$\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k}, \tag{3.23}$$

$$\Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ik,j} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial\alpha^i}, \tag{3.24}$$

$$\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ij}{}^l g_{lk}. \ \bullet \tag{3.25}$$

Пусть теперь u произвольный параметр, причем $u=u(s)$ — некоторая достаточно гладкая скалярная функция. Тогда

$$\frac{d\alpha^l}{ds} = \frac{d\alpha^l}{du}\frac{du}{ds},$$

$$\frac{d^2\alpha^l}{ds^2}=\frac{d^2\alpha^l}{du^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\frac{d\alpha^l}{du}\frac{d^2u}{ds^2}. \tag{3.26}$$

Из (3.21) получим

$$f^l\equiv\frac{d^2\alpha^l}{du^2}+\Gamma^l_{ij}\frac{d\alpha^i}{du}\frac{d\alpha^j}{du}=\lambda\frac{d\alpha^l}{du}, \tag{3.27}$$

где λ — некоторая скалярная функция:

$$\lambda=-\frac{d^2u}{ds^2}\Big/\left(\frac{du}{ds}\right)^2. \tag{3.28}$$

Так как справа в (3.27) стоит вектор, то и слева должен быть тоже вектор. Следовательно, вектор f^l коллинеарен вектору $\frac{d\alpha^l}{du}$.

Упражнение 3.3. Проверить, что правая часть (3.27) преобразуется при переходе от одной системы координат к другой (1.9) как контравариантные компоненты вектора.

Упражнение 3.4. Доказать, что если вдоль кривой (1.14) вектор f^l (3.27) коллинеарен неизотропному вектору $\frac{d\alpha^l}{du}$, то кривая (1.14) геодезическая. ●

Вернемся теперь к уравнениям геодезической линии, отнесенной к произвольному параметру u. Обозначим левую часть (3.12) через

$$2f_i\equiv\frac{d}{du}\frac{\partial w}{\partial\tau^i}-\frac{\partial w}{\partial\alpha^i}. \tag{3.29}$$

Так как τ^i — вектор, то при преобразовании (1.9)

$$\tau^i=B^i{}_{i'}\tau^{i'}, \tag{3.30}$$

откуда, считая τ^i функцией $\tau^{i'}$ и $\alpha^{i'}$, получим

$$\frac{\partial\tau^i}{\partial\tau^{i'}}=B^i{}_{i'}, \tag{3.31}$$

тогда

$$\frac{\partial w}{\partial\tau^{i'}}=\frac{\partial w}{\partial\tau^i}\frac{\partial\tau^i}{\partial\tau^{i'}}=\frac{\partial w}{\partial\tau^i}B^i{}_{i'}. \tag{3.32}$$

Поэтому для первого слагаемого правой части (3.29) в новой системе координат

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\partial w}{\partial \tau^{i'}}\right)=\frac{d}{du}\left(\frac{\partial w}{\partial \tau^{i}}\right)B^{i}{}_{i'}+\frac{\partial w}{\partial \tau^{i}}\frac{\partial^2 \alpha^{i}}{\partial \alpha^{i'}\partial \alpha^{j'}}\frac{d\alpha^{j'}}{du}. \tag{3.33}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha^{i'}}=\frac{\partial w}{\partial \alpha^{i}}B^{i}{}_{i'}+\frac{\partial w}{\partial \tau^{i}}\frac{\partial \tau^{i}}{\partial \alpha^{i'}}. \tag{3.34}$$

Вычитая (3.34) из (3.33), согласно (3.29) имеем

$$2\left(f_{i'}-f_{i}B^{i}{}_{i'}\right)=\frac{\partial w}{\partial \tau^{i}}\frac{\partial^2 \alpha^{i}}{\partial \alpha^{i'}\partial \alpha^{j'}}\frac{d\alpha^{j'}}{du}-\frac{\partial w}{\partial \tau^{i}}\frac{\partial^2 \alpha^{i}}{\partial \alpha^{i'}\partial \alpha^{j'}}\tau^{j'}=0. \tag{3.35}$$

Отсюда следует, что f_i преобразуются как ковариантные компоненты вектора.

Повторяя все рассуждения, сделанные при переходе от уравнений (3.14) к (3.19) — (3.21), получим для ковариантных компонент вектора

$$f_k\equiv g_{kj}\frac{d\tau^{j}}{du}+\Gamma_{ij,k}\tau^{i}\tau^{j}\equiv g_{kj}\frac{d^2\alpha^{j}}{du^2}+\Gamma_{ij,k}\frac{d\alpha^{i}}{du}\frac{d\alpha^{j}}{du}, \tag{3.36}$$

а для контравариантных

$$f^{l}\equiv\frac{d^2\alpha^{l}}{du^2}+\Gamma^{l}_{ij}\frac{d\alpha^{i}}{du}\frac{d\alpha^{j}}{du}, \tag{3.37}$$

где u — произвольный параметр кривой. Относительно w мы предполагали, что она является некоторой скалярной функцией τ^{i} и α^{i}.

Запишем теперь некоторую систему дифференциальных уравнений при произвольном параметре u

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\partial w}{\partial \tau^{i}}\right)-\frac{\partial w}{\partial \alpha^{i}}=0. \tag{3.38}$$

Упражнение 3.5. Доказать, что первым интегралом системы (3.38) является

$$\frac{\partial w}{\partial \tau^{i}}\tau^{i}-w=\text{const}. \tag{3.39}$$

Упражнение 3.6. Доказать, что из (3.39) следует

$$w\equiv g_{ij}\tau^{i}\tau^{j}=\text{const}. \quad \bullet \tag{3.40}$$

Если в (3.38) за параметр u принять длину дуги

s, то получим дифференциальные уравнения (3.14) для неизотропной геодезической линии. Если же в точке M геодезическая линия имеет изотропное направление, то $w=0$ в каждой ее точке, что следует из (3.40). Таким образом, *изотропной геодезической линией* называется кривая, которая для некоторого параметра u удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.38) или уравнению

$$\frac{d^2\alpha^l}{du^2}+\Gamma^l_{ij}\frac{d\alpha^i}{du}\frac{d\alpha^j}{du}=0, \tag{3.41}$$

а также частному первому интегралу

$$g_{ij}\frac{d\alpha^i}{du}\frac{d\alpha^j}{du}=0. \tag{3.42}$$

Упражнение 3.7. Доказать, что достаточным условием для того, чтобы некоторая кривая являлась изотропной геодезической линией, есть условие пропорциональности вектора $\frac{d\alpha^i}{du}$ вектору f_i (3.37) и удовлетворение уравнениям (3.42).

Упражнение 3.8. Доказать, что в метрике (2.25) изотропная геодезическая линия имеет вид

$$\alpha^i=a^iu+b^i \quad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{3.43}$$

где a^i, b^i — некоторые постоянные, причем

$$(a^1)^2+(a^2)^2-(a^3)^2=0. \tag{3.44}$$

Упражнение 3.9. Найти изотропные геодезические линии в четырехмерном пространстве с метрикой

$$ds^2=(d\alpha^1)^2+(d\alpha^2)^2+(d\alpha^3)^2-(d\alpha^4)^2. \tag{3.45}$$

§ 4. Ковариантное дифференцирование

Мы видели, что частные производные $\partial f/\partial\alpha^i$ скалярной функции $f(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ преобразуются при переходе от одной системы координат к другой как ковариантные компоненты вектора, т. е. частные производные от скаляра носят тензорный характер. Этого, вообще говоря, нельзя сказать про вторые частные производные $\partial^2 f/\partial\alpha^i\partial\alpha^j$. В самом деле, дифференцируя равенство

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha^{i'}}=\frac{\partial f}{\partial\alpha^i}\frac{\partial\alpha^i}{\partial\alpha^{i'}} \tag{4.1}$$