s, то получим дифференциальные уравнения (3.14) для неизотропной геодезической линии. Если же в точке M геодезическая линия имеет изотропное направление, то $w=0$ в каждой ее точке, что следует из (3.40). Таким образом, *изотропной геодезической линией* называется кривая, которая для некоторого параметра u удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.38) или уравнению

$$\frac{d^2\alpha^l}{du^2}+\Gamma^l_{ij}\frac{d\alpha^i}{du}\frac{d\alpha^j}{du}=0, \tag{3.41}$$

а также частному первому интегралу

$$g_{ij}\frac{d\alpha^i}{du}\frac{d\alpha^j}{du}=0. \tag{3.42}$$

Упражнение 3.7. Доказать, что достаточным условием для того, чтобы некоторая кривая являлась изотропной геодезической линией, есть условие пропорциональности вектора $\frac{d\alpha^i}{du}$ вектору f_i (3.37) и удовлетворение уравнениям (3.42).

Упражнение 3.8. Доказать, что в метрике (2.25) изотропная геодезическая линия имеет вид

$$\alpha^i=a^iu+b^i \quad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{3.43}$$

где a^i, b^i — некоторые постоянные, причем

$$(a^1)^2+(a^2)^2-(a^3)^2=0. \tag{3.44}$$

Упражнение 3.9. Найти изотропные геодезические линии в четырехмерном пространстве с метрикой

$$ds^2=(d\alpha^1)^2+(d\alpha^2)^2+(d\alpha^3)^2-(d\alpha^4)^2. \tag{3.45}$$

§ 4. Ковариантное дифференцирование

Мы видели, что частные производные $\partial f/\partial\alpha^i$ скалярной функции $f(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ преобразуются при переходе от одной системы координат к другой как ковариантные компоненты вектора, т. е. частные производные от скаляра носят тензорный характер. Этого, вообще говоря, нельзя сказать про вторые частные производные $\partial^2 f/\partial\alpha^i\partial\alpha^j$. В самом деле, дифференцируя равенство

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha^{i'}}=\frac{\partial f}{\partial\alpha^i}\frac{\partial\alpha^i}{\partial\alpha^{i'}} \tag{4.1}$$

по $\alpha^{l'}$ получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^{i'}\partial\alpha^{l'}} = \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^i\partial\alpha^j} B^i{}_{i'} B^j{}_{j'} + \frac{\partial f}{\partial\alpha^i} \frac{\partial^2\alpha^i}{\partial\alpha^{i'}\partial\alpha^{l'}}, \tag{4.2}$$

откуда следует, что при $\frac{\partial^2\alpha^i}{\partial\alpha^{i'}\partial\alpha^{l'}} \not\equiv 0$ величины $\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^{i'}\partial\alpha^{l'}}$ тензора не образуют.

Используя векторный характер правой части (3.27)

$$\frac{d\alpha^{l'}}{du} = A^{l'}{}_l \frac{d\alpha^l}{du}, \tag{4.3}$$

получим

$$A^{l'}{}_l \frac{d^2\alpha^l}{du^2} = \frac{d^2\alpha^{l'}}{du^2} + A^{l'}{}_l \frac{\partial^2\alpha^l}{\partial\alpha^{i'}\partial\alpha^{l'}} \frac{d\alpha^{i'}}{du} \frac{d\alpha^{l'}}{du}. \tag{4.4}$$

С другой стороны, в новой системе координат соотношения (3.27) имеют вид

$$f^{l'} = \frac{d^2\alpha^{l'}}{du^2} + \Gamma^{l'}_{i'j'} \frac{d\alpha^{i'}}{du} \frac{d\alpha^{j'}}{du}, \tag{4.5}$$

поэтому

$$f^{l'} - A^{l'}{}_l f^l = \frac{d^2\alpha^{l'}}{du^2} + \Gamma^{l'}_{i'j'} \frac{d\alpha^{i'}}{du} \frac{d\alpha^{j'}}{du} - $$
$$- A^{l'}{}_l \frac{d^2\alpha^l}{du^2} - A^{l'}{}_l \Gamma^l_{ij} \frac{d\alpha^i}{du} \frac{d\alpha^j}{du}. \tag{4.6}$$

Подставляя сюда из (4.4) выражения для $A^{l'}{}_l \frac{d^2\alpha^l}{du^2}$ и учитывая соотношения (4.3) и (3.27), получим

$$\Gamma^{l'}_{i'j'} = \Gamma^l_{ij} B^i{}_{i'} B^j{}_{j'} A^{l'}{}_l + A^{l'}_l \frac{\partial^2\alpha^l}{\partial\alpha^{i'}\partial\alpha^{j'}}. \tag{4.7}$$

Следовательно, символы Кристоффеля 2-го рода не образуют тензора.

Этот результат следует сразу, если воспользоваться результатом упр. 1.3. В самом деле, если существует декартова система координат, т. е. система, для которой всюду $g_{ij} = \text{const}$, то в этой системе координат все символы Кристоффеля обращаются в нуль, что следует из (3.17). Но, естественно, найдутся такие системы координат, для которых не все Γ_{ij}^k обращаются в нуль. Следовательно, Γ_{ij}^k тензора не образуют, так как в противном случае из результата упр. 1.3 следовало бы, что в любой системе координат $\Gamma_{ij}^k=0$.

Упражнение 4.1. Доказать, что символы Кристоффеля 1-го рода преобразуются при переходе от одной системы координат к другой по закону

$$\Gamma_{i'j',k'}=\Gamma_{ij,k}B^i{}_{i'}B^j{}_{j'}B^k{}_{k'}+g_{l'k'}A^{l'}{}_l\frac{\partial^2\alpha^l}{\partial\alpha^{i'}\partial\alpha^{j'}}. \tag{4.8}$$

Упражнение 4.2. Показать, что

$$\Gamma_{ij}^l=\Gamma_{i'j'}{}^{l'}A^{i'}{}_iA^{j'}{}_jB^l{}_{l'}+B^l{}_{l'}\frac{\partial^2\alpha^{l'}}{\partial\alpha^i\partial\alpha^j}, \tag{4.9}$$

$$\Gamma_{ij,k}=\Gamma_{i'j',k}A^{i'}{}_iA^{j'}{}_jA^{k'}{}_k+g_{lk}B^l{}_{l'}\frac{\partial^2\alpha^{l'}}{\partial\alpha^i\partial\alpha^j}. \bullet \tag{4.10}$$

Рассмотрим вектор a^i, определенный вдоль некоторой кривой

$$\alpha^i=\alpha^i(u). \tag{4.11}$$

Абсолютной производной $\frac{Da^i}{du}$ вектора a^i называется выражение

$$\frac{Da^i}{du}=\frac{da^i}{du}+\Gamma^i{}_{jk}a^j\frac{d\alpha^k}{du}. \tag{4.12}$$

Записывая (4.12) в новой системе координат, получим

$$\frac{Da^{i'}}{du}-A^{i'}{}_i\frac{Da^i}{du}=$$

$$=a^j\frac{d\alpha^k}{du}\left(\frac{\partial^2\alpha^{i'}}{\partial\alpha^j\partial\alpha^k}+\frac{\partial^2\alpha^i}{\partial\alpha^{j'}\partial\alpha^{k'}}A^{j'}{}_jA^{k'}{}_kA^{i'}{}_i\right). \tag{4.13}$$

Правая часть согласно (1.20) обращается в нуль. Тем самым доказан тензорный характер абсолютной производной (4.12). (Каждое слагаемое по отдельности в правой части (4.12) тензора не образует.)

Будем говорить, что вектор a^i переносится параллельно вдоль кривой (4.11), если удовлетворяются уравнения

$$\frac{Da^i}{du}=0. \tag{4.14}$$

В частности, если рассматривается евклидово пространство в прямоугольной системе координат, то символы Кристоффеля в (4.12) обращаются в нуль тождественно и параллельное перенесение вдоль кривой (4.11) означает постоянство компонент a^i вектора $\vec{a}$ вдоль этой кривой.

Заметим также, что уравнения геодезической линии (3.21) согласно (4.12) можно переписать в виде

$$\frac{D}{ds}\frac{d\alpha^l}{ds} \equiv \frac{D}{ds}\tau^l = 0, \tag{4.15}$$

что поддается следующей трактовке: вектор $\tau^l = \dfrac{d\alpha^l}{ds}$ (единичный), касательный к геодезической линии, переносится вдоль нее параллельно.

Для того чтобы сконструировать инвариантное определение абсолютной производной от ковариантных компонент вектора b_i, воспользуемся тем обстоятельством, что для произвольного вектора $a^i(u)$, который переносится параллельно вдоль кривой (4.11), величина

$$I(u) = a^i(u)\, b_i(u) \tag{4.16}$$

является скаляром. Тогда, очевидно, скаляром является и производная $\dfrac{dI}{du}$, и согласно (4.12) и (4.14)

$$\frac{dI}{du} = \frac{da^i}{du} b_i + a^i \frac{db_i}{du} = -\Gamma^i_{jk} a^j \frac{d\alpha^k}{du} b_i + $$
$$+ a^i \frac{db_i}{du} = a^i \left(\frac{db_i}{du} - \Gamma^l_{ik} b_l \frac{d\alpha^k}{du} \right). \tag{4.17}$$

Согласно обратному тензорному признаку (гл. 1, § 3) величины, стоящие в круглых скобках в выражении (4.17), образуют ковариантные компоненты вектора. Величины

$$\frac{Db_i}{du} \equiv \frac{db_i}{du} - \Gamma^l_{ik} b_l \frac{d\alpha^k}{du} \tag{4.18}$$

называются абсолютной производной вектора b_i.

Параллельное перенесение ковариантного вектора b_i вдоль кривой (4.11) означает обращение в нуль абсолютной производной (4.18)

$$\frac{Db_i}{du}=0. \qquad (4.19)$$

Используя теперь формулы (4.12) и (4.18), можем найти абсолютную производную от тензора любого ранга. Для этого образуем инвариант (скаляр), свертывая рассматриваемый тензор с произвольными векторами a^i и b_i, параллельно перенесенными вдоль кривой (4.11), и рассматриваем производную этого скаляра по параметру u. Например, для тензора T^{ij} конструируем скаляр $T^{ij}b_ib_j$ и, используя формулы (4.18) и (4.19), найдем

$$\frac{DT^{ij}}{du}=\frac{dT^{ij}}{du}+\Gamma^i_{kl}T^{kj}\frac{d\alpha^l}{du}+\Gamma^j_{kl}T^{ik}\frac{d\alpha^l}{du}. \qquad (4.20)$$

Выражение (4.20) назовем *абсолютной производной тензора* T^{ij}. Аналогично строя скаляры $T_{ij}a^ia^j$ и $T_i{}^jb^ia_j$, получим

$$\frac{DT_{ij}}{du}=\frac{dT_{ij}}{du}-\Gamma^k_{il}T_{kj}\frac{d\alpha^l}{du}-\Gamma^k_{jl}T_{ik}\frac{d\alpha^l}{du}, \qquad (4.21)$$

$$\frac{DT_i{}^j}{du}=\frac{dT_i{}^j}{du}-\Gamma^k_{il}T^j_k\frac{d\alpha^l}{du}+\Gamma^j_{kl}T_i{}^k\frac{d\alpha^l}{du}. \qquad (4.22)$$

Формулами (4.21) и (4.22) представлены абсолютные производные тензоров T_{ij} и $T_i{}^j$.

Будем говорить, что тензор $T^{i_1\ldots i_m}_{j_1\ldots j_k}(u)$ параллельно переносится вдоль кривой (4.11), если

$$\frac{D}{du}T^{i_1\ldots i_m}_{j_1\ldots j_k}=0. \qquad (4.23)$$

Заметим, что абсолютная производная от тензора m-го ранга является тензором того же ранга.

Запишем формулы (4.12) и (4.18) в другом виде:

$$\frac{Da^i}{du}=\left(\frac{\partial a^i}{\partial\alpha^k}+\Gamma^i_{jk}a^j\right)\frac{d\alpha^k}{du}, \qquad (4.24)$$

$$\frac{Db_i}{du}=\left(\frac{\partial b_i}{\partial\alpha^k}-\Gamma^j_{ik}b_j\right)\frac{d\alpha^k}{du}. \qquad (4.25)$$

Выражения, стоящие в круглых скобках в (4.24) и (4.25), называются ковариантнымн производными векторов a^i и b_i соответственно

$$a^i{}_{,j} \equiv \nabla_j a^i \equiv a^i|_j \equiv \partial_j a_i \equiv \frac{\partial a^i}{\partial \alpha^j} + \Gamma^i_{kj} a^k, \tag{4.26}$$

$$b_{i,j} \equiv \nabla_j b_i \equiv b_i|_j \equiv \partial_j b_i \equiv \frac{\partial b_i}{\partial \alpha^j} - \Gamma^k_{ij} b_k. \tag{4.27}$$

Аналогично определяются ковариантные производные тензоров любого ранга (см. гл. 1, § 3).

Упражнение 4.3. Подсчитать абсолютную и ковариантную производную тензоров $T_{jk}{}^l$, $S_{lm}{}^{ik}$.

Упражнение 4.4. Показать, что для тензора σ^{ij}

$$\sigma^{ij}{}_{,j} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \alpha^j} + \Gamma^i_{jk}\sigma^{jk} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \alpha^k}(\ln g)\,\sigma^{ik}. \tag{4.28}$$

Упражнение 4.5. Доказать формулы

$$g^{ij}{}_{,k} = 0;\ g_{ij,k} = 0;\ \delta^i{}_{j,k} = 0; \tag{4.29}$$

$$Dg^{ij} = 0;\ Dg_{ij} = 0;\ D\delta^i{}_j = 0. \tag{4.30}$$

Упражнение 4.6. Проверить справедливость формул

$$(\sqrt{g}\,\epsilon_{i_1\ldots i_n})_{,k} = 0, \tag{4.31}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\,\epsilon^{i_1\ldots i_n}\right)_{,k} = 0. \tag{4.32}$$

Упражнение 4.7. Доказать, что для скаляра $I(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$

$$\frac{DI}{du} = \frac{dI}{du}, \quad I_{,i} = \frac{\partial I}{\partial \alpha^i}. \; \bullet \tag{4.33}$$

В заключение укажем один способ определения символов Кристоффеля, удобный при практическом вычислении. Если задана метрическая форма, то после составления выражения w (3.5) получим, произведя соответствующие дифференцирования по формуле (3.29), выражение для вектора f_i через компоненты метрического тензора g_{ij}. С другой стороны, имеем выражение для вектора f_i (3.36). Из сравнения этих выражений находим выражения символов Кристоффеля 1-го рода. Такой путь часто оказывается более простым, чем непосредственное вычисление по формулам (3.17).

Упражнение 4.8. Подсчитать указанным приемом символы Кристоффеля 1-го рода, если метрика задается формулой

$$ds^2=(d\alpha^1)^2+(\alpha^1 d\alpha^2)^2+(\alpha^1 \sin\alpha^2 d\alpha^3)^2. \tag{4.34}$$

Упражнение 4.9. Доказать, что

$$\frac{d}{ds}(g_{ij}\tau^i\tau^j)=2g_{ij}\tau^i\frac{D\tau^j}{ds}, \tag{4.35}$$

где τ^i — произвольный вектор, заданный вдоль некоторой кривой, длиной дуги которой является s.

Упражнение 4.10. Доказать, что

$$\Gamma_{ij}^{j}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha^i}\ln g \tag{4.36}$$

(см. упр. 2.4).

§ 5. Формулы Френе

Рассмотрим некоторую кривую в пространстве Римана

$$\alpha^i=\alpha^i(s), \tag{5.1}$$

где параметром кривой s будем считать длину дуги этой кривой, отсчитываемой от некоторой определенной точки. Поначалу будем считать, что среди рассматриваемых нами векторов отсутствуют векторы с изотропными направлениями. Очевидно, вектор

$$\tau^i=\frac{d\alpha^i}{ds} \tag{5.2}$$

является единичным вектором, касательным к кривой (5.1). Тогда, учитывая возможность неопределенной метрики, имеем

$$g_{ij}\tau^i\tau^j=\varepsilon, \tag{5.3}$$

где ε — знаковое число. Дифференцируя (5.3) абсолютным образом (или используя (4.35)), получим

$$g_{ij}\tau^i\frac{D\tau^j}{ds}\equiv\tau_j\frac{D\tau^j}{ds}=0. \tag{5.4}$$

Из (5.4) видно, что вектор $\frac{D\tau^i}{ds}$ ортогонален к касательному вектору τ^i (см. упр. 2.6).

Единичный вектор $\tau_{(1)}{}^i$, коллинеарный вектору