символы Кристоффеля 1-го рода, если метрика задается формулой

$$ds^2 = (d\alpha^1)^2 + (\alpha^1 d\alpha^2)^2 + (\alpha^1 \sin \alpha^2 d\alpha^3)^2. \qquad (4.34)$$

Упражнение 4.9. Доказать, что

$$\frac{d}{ds}(g_{ij}\tau^i\tau^j) = 2g_{ij}\tau^i \frac{D\tau^j}{ds}, \qquad (4.35)$$

где τ^i — произвольный вектор, заданный вдоль некоторой кривой, длиной дуги которой является s.

Упражнение 4.10. Доказать, что

$$\Gamma_{ij}^{j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha^i}\ln g \qquad (4.36)$$

(см. упр. 2.4).

§ 5. Формулы Френе

Рассмотрим некоторую кривую в пространстве Римана

$$\alpha^i = \alpha^i(s), \qquad (5.1)$$

где параметром кривой s будем считать длину дуги этой кривой, отсчитываемой от некоторой определенной точки. Поначалу будем считать, что среди рассматриваемых нами векторов отсутствуют векторы с изотропными направлениями. Очевидно, вектор

$$\tau^i = \frac{d\alpha^i}{ds} \qquad (5.2)$$

является единичным вектором, касательным к кривой (5.1). Тогда, учитывая возможность неопределенной метрики, имеем

$$g_{ij}\tau^i\tau^j = \varepsilon, \qquad (5.3)$$

где ε — знаковое число. Дифференцируя (5.3) абсолютным образом (или используя (4.35)), получим

$$g_{ij}\tau^i\frac{D\tau^j}{ds} \equiv \tau_j\frac{D\tau^j}{ds} = 0. \qquad (5.4)$$

Из (5.4) видно, что вектор $\dfrac{D\tau^i}{ds}$ ортогонален к касательному вектору τ^i (см. упр. 2.6).

Единичный вектор $\tau_{(1)}{}^i$, коллинеарный вектору

$\dfrac{D\tau^i}{ds}$, назовем *первым вектором нормали,* или первой нормалью, а длину вектора $\dfrac{D\tau^i}{ds}$ — *первой кривизной* $\varkappa_{(1)}$ кривой (5.1). Следовательно,

$$\frac{D\tau^i}{ds} = \varkappa_{(1)}\, \tau^i_{(1)}, \quad g_{ij}\, \tau^i_{(1)}\, \tau^j{}_{(1)} = \varepsilon_{(1)}, \tag{5.5}$$

где $\varepsilon_{(1)}$ — знаковое число вектора $\tau_{(1)}{}^i$. Уравнение (5.5) носит название *первой формулы Френе.*

Определим теперь единичный вектор $\tau_{(2)}{}^i$ и скаляр $\varkappa_{(2)}$ так, чтобы удовлетворялись уравиеиия

$$\frac{D\tau^i_{(1)}}{ds} = \varkappa_{(2)}\, \tau^i_{(2)} - \varepsilon\varepsilon_{(1)}\, \varkappa_{(1)}\, \tau^i, \quad g_{ij}\, \tau^i_{(2)} \tau^j_{(2)} = \varepsilon_{(2)}, \tag{5.6}$$

где $\varepsilon_{(2)}$ — знаковое число вектора $\tau^i{}_{(2)}$. Вектор $\tau^i{}_{(2)}$ ортогонален к векторам τ^i и $\tau^i{}_{(1)}$. В самом деле, умножая последовательно (5.6) иа τ_i и $\tau_{(1)i}$, получим

$$\varkappa_{(2)}\, \tau^i{}_{(2)}\, \tau_i = \frac{D\tau^i_{(1)}}{ds} \tau_i + \varepsilon_{(1)} \varkappa_{(1)}, \quad \varepsilon_{(2)}\, \tau^i{}_{(2)} \tau_{(1)i} = 0, \tag{5.7}$$

но так как

$$\frac{D\tau^i_{(1)}}{ds} \tau_i = -\tau^i{}_{(1)} \frac{D\tau_i}{ds} = -\frac{D\tau^i}{ds} \tau_{(1)i}, \tag{5.8}$$

то, умножая (5.5) на $\tau_{(1)i}$, получим

$$\frac{D\tau^i}{ds} \tau_{(1)i} = \varkappa_{(1)}\, \tau^i{}_{(1)}\, \tau_{(1)i} = \varepsilon_{(1)}\, \varkappa_{(1)}. \tag{5.9}$$

Подставляя (5.8) и (5.9) в первую формулу (5.7), получим доказательство ортогоиальиости $\tau^i{}_{(2)}$ и τ^i. Вектор $\tau^i{}_{(2)}$ называется *вторым единичным вектором нормали* (второй нормалью), а $\varkappa_{(2)}$ — *второй кривизной кривой* (5.1).

Вводим теперь единичиый вектор $\tau^i{}_{(3)}$ и скаляр $\varkappa_{(3)}$ так, чтобы выполнялись соотиошения

$$\frac{D\tau^i_{(2)}}{ds} = \varkappa_{(3)}\, \tau^i_{(3)} - \varepsilon_{(1)}\, \varepsilon_{(2)}\, \varkappa_{(2)}\, \tau^i_{(1)}, \quad g_{ij}\, \tau^i_{(3)}\, \tau^j_{(3)} = \varepsilon_{(3)}, \tag{5.10}$$

где $\varepsilon_{(3)}$ — знаковое число вектора $\tau^i{}_{(3)}$. Аиалогичио, можно доказать, что вектор $\tau^i{}_{(3)}$ ортогонален векторам τ^i, $\tau^i{}_{(1)}$, $\tau^i{}_{(2)}$. Он называется *третьим единичным вектором нормали* (третьей нормалью), а $\varkappa_{(3)}$ — *третьей кривизной кривой.* Продолжая эти рассуждения, можно методом математической индукции доказать формулы

$$\frac{D\tau^i_{(m-1)}}{ds} = \varkappa_{(m)}\tau^i_{(m)} - \varepsilon_{(m-2)}\varepsilon_{(m-1)}\varkappa_{(m-1)}\tau^i_{(m-2)},$$

$$g_{ij}\tau_{(m)}{}^i\tau_{(m)}{}^j = \varepsilon_{(m)}, \ \langle m=1, 2, \ldots\rangle. \tag{5.11}$$

При этом

$$\tau^i{}_{(0)} \equiv \tau^i, \quad \varkappa_{(0)} = 0, \ \varepsilon_{(0)} = \varepsilon. \tag{5.12}$$

Векторы $\tau^i{}_{(1)}$, $\tau^i{}_{(2)}$, ... называются соответственно первым, вторым, ... вектором нормали, а скаляры $\varkappa_{(1)}$, $\varkappa_{(2)}$, ... — соответственно первой, второй, ... кривизной кривой.

Разумеется, набор векторов $\tau^i{}_{(m)}$ не может быть бесконечным, так как мы рассматриваем риманово пространство конечного числа измерений n. Поэтому можно рассматривать только n взаимно ортогональных векторов. Чтобы оборвать цепочку уравнений (5.11), следует положить $\varkappa_{(n)}=0$, тогда для $m=n$

$$\frac{D\tau^i_{(m-1)}}{ds} = -\varepsilon_{(n-2)}\varepsilon_{(n-1)}\varkappa_{(n-1)}\tau^i_{(n-2)}. \tag{5.13}$$

Итак, формулы Френе имеют вид

$$\frac{D\tau^i_{(m-1)}}{ds}\varkappa_{(m)}\tau^i{}_{(m)} - \varepsilon_{(m-2)}\varepsilon_{(m-1)}\varkappa_{(m-1)}\tau^i{}_{(m-2)},$$

$$g_{ij}\tau^i_{(m-1)}\tau^j_{(m-1)} = \varepsilon_{(m-1)}, \ \langle m=1, 2, \ldots, n\rangle, \tag{5.14}$$

при этом

$$\tau^i_{(0)} \equiv \tau^i, \ \varkappa_{(0)} \equiv 0, \ \varkappa_{(n)} \equiv 0. \tag{5.15}$$

При выводе формул Френе (5.14) мы предполагали, что каждая введенная кривизна $\varkappa_{(m)} \neq 0$. Однако из уравнений (5.14) видно, что если $\varkappa_{(1)} \neq 0, \varkappa_{(2)} \neq 0, \ldots$ ..., $\varkappa_{(k-1)} \neq 0$, но $\varkappa_{(k)}=0$, $k<n$, то цепочка уравнений (5.11) обрывается раньше, чем $m=n$, и последнее уравнение этой цепочки имеет вид (5.13), где следует положить $n=k$. В частности, если $k=1$ (т. е. $\varkappa_{(1)}=0$),

то так как из (5.5) следует, что

$$\varkappa_{(1)}^2 = e_{(1)} g_{ij} \frac{D\tau^i}{ds} \frac{D\tau^j}{ds}, \tag{5.16}$$

то это может случиться, если, например, $\frac{D\tau^i}{ds} = 0$, т. е. согласно (4.15) рассматриваемая кривая является геодезический. Если же даже не все компоненты $\frac{D\tau^i}{ds}$ обращаются в нуль, но вектор $\frac{D\tau^i}{ds}$ является изотропиым, то $\varkappa_{(1)} = 0$.

В обоих случаях уравнение (5.5) уже не определяет первого вектора нормали $\tau^i_{(1)}$. Тем самым цепочка уравнений (5.11) обрывается на первом шаге.

Однако и в этом случае можно ввести в некоторой точке кривой единичные взаимно ортогональные векторы $\tau^i_{(1)}, \ldots, \tau^i_{(n-1)}$ и ортогональные к вектору τ^i. Перемещая далее их параллельно вдоль кривой, получим в каждой точке кривой n взаимно ортогональных единичных векторов независимо от того, обращается в нуль какая-нибудь кривизна этой кривой или нет. Совокупность этих векторов называется *многогранником Френе.*

Если в каждой точке кривой рассмотреть касательное евклидово пространство, то многогранник Френе в каждом таком пространстве образует орто-

Если считать $\varkappa_{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ известными функциями длины дуги s, то на (5.14) можно смотреть

нормированный репер $\vec{\tau}, \vec{\tau}_{(1)}, \ldots, \vec{\tau}_{(n-1)}$.

как на систему дифференциальных уравнений первого порядка для определения векторов многогранника Френе (или сопровождающего репера) $\tau^i, \tau^i_{(1)}, \ldots, \tau^i_{(n-1)}$. Для решения этой системы нужно задать начальные условия, т. е. положение этого многогранника в начальной точке кривой.

Упражнение 5.1. Пусть в V_n задана метрическая форма в виде

$$\Phi = (da^1)^2 + \ldots + (da^n)^2. \tag{5.17}$$

Кривая, для которой в каждой точке

$$\varkappa_{(1)} \equiv \varkappa = \text{const}, \quad \varkappa_{(2)} = 0, \tag{5.18}$$

называется *n-мерной окружностью.* Доказать, что для нее справедливо уравнение

$$\alpha^i = a^i \cos \varkappa s + b^i \sin \varkappa s + c^i, \tag{5.19}$$

где

$$a^i a_i = b^i b_i = \frac{1}{\varkappa^2}, \quad a^i b_i = 0. \tag{5.20}$$

Упражнение 5.2. Найти кривизну линии (2.22) в метриках (2.23) и (2.25).

Упражнение 5.3. Пусть в евклидовом пространстве R_3 задан симметричный тензор второго ранга $\underset{\sim}{T}$, зависящий от некоторого параметра t. *Пятимерным пространством Ильюшина* называется евклидово пространство R_5, порожденное девиатором тензора $\underset{\sim}{T}(t)$, так что

$$\bar{t}^{11}\sqrt{\frac{3}{2}} = э^1 \cos\beta + э^2 \sin\beta,$$

$$\bar{t}^{22}\sqrt{\frac{3}{2}} = -э^1 \sin\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) + э^2 \cos\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\bar{t}^{33}\sqrt{\frac{3}{2}} = э^1 \sin\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right) - э^2 \cos\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right), \tag{5.21}$$

$$\bar{t}^{12}\sqrt{\frac{3}{2}} = э^3 \cos\frac{\pi}{6}, \quad \bar{t}^{23}\sqrt{\frac{3}{2}} = э^4 \cos\frac{\pi}{6},$$

$$\bar{t}^{31}\sqrt{\frac{3}{2}} = э^5 \cos\frac{\pi}{6},$$

причем $э^i$ ($i=1, \ldots, 5$) — компоненты так называемого *физического вектора* $\vec{э}$ в ортонормированном репере k_i:

$$\vec{э}(t) = э^i(t)\,\vec{k}_i \quad (i=1, \ldots, 5). \tag{5.22}$$

Построить в пространстве Ильюшина R_5 многогранник Френе, связанный с кривой

$$\vec{э} = \vec{э}(t). \; \bullet \tag{5.23}$$

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство. Пусть в нем задана кривая уравнением для радиус-вектора $\vec{r}$ (рис. 14)

$$\vec{r}=\vec{r}(u) \tag{5.24}$$

или координатами радиус-вектора в прямоугольной декартовой системе координат

$$x^i=x^i(u) \quad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{5.25}$$

Если за параметр кривой прниять длиину дуги s,

$$x^i=x^i(s), \tag{5.26}$$

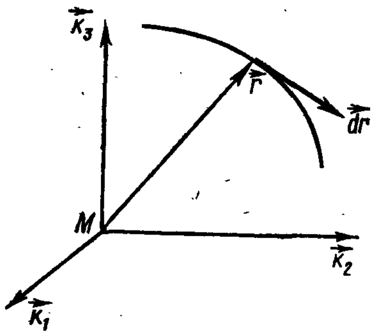

Рис. 14

то вектор

$$\vec{\tau}\equiv\frac{d\vec{r}}{ds}, \tag{5.27}$$

касательный к этой кривой, будет единичным, причем

$$\frac{d\vec{r}}{du}=\vec{\tau}\,\frac{ds}{du}. \tag{5.28}$$

Формулы (5.14) для этого случая примут вид

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=k\vec{\nu},$$

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds}=-k\vec{\tau}+\varkappa\vec{\beta}, \tag{5.29}$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds}=-\varkappa\vec{\nu}.$$

Первый вектор нормали $\vec{\tau}_{(1)}=\vec{\nu}$ носит названиие *вектора главной нормали*, второй вектор нормали $\vec{\tau}_{(2)}=$

$=\vec{\beta}$ — *вектора бинормали.* Первая кривизна $\varkappa_{(1)}=k$ *называется кривизной пространственной кривой*

$$k=\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| \tag{5.30}$$

и является существенно положительной. Величина, обратная к k, называется радиусом кривизны кривой в точке M и обозначается $\rho=1/k$. Вторая кривизна $\varkappa_{(2)}=\varkappa$ называется *кручением кривой*

$$|\varkappa|=\left|\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right|. \tag{5.31}$$

Кручение может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Тройка единичных векторов $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ называется *трехгранником* Френе, или сопро-

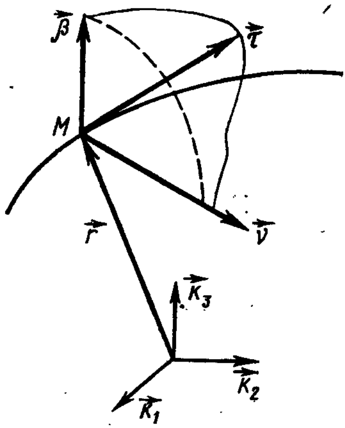

Рис. 15

вождающим репером (рис. 15). Плоскость, проходящая через точку M кривой (5.24), в которой лежат векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$, называется *соприкасающейся плоскостью.* Плоскость, содержащая векторы $\vec{\nu}$ и $\vec{\beta}$, называется *нормальной плоскостью,* и, наконец, плоскость, в которой лежат векторы $\vec{\beta}$ и $\vec{\tau}$,— *спрямляющей* плоскостью.

Упражнение 5.4. Доказать, что

$$\vec{\beta}=\vec{\tau}\times\vec{\nu}. \tag{5.32}$$

Упражнение 5.5. Доказать, что

$$\varkappa=\frac{S(\vec{r}'\wedge\vec{r}''\wedge\vec{r}''')}{(\vec{r}'\times\vec{r}'')^2}, \tag{5.33}$$

где штрих означает производную радиус-вектора по параметру s, $S(\vec{r}'\wedge\vec{r}''\wedge\vec{r}''')$ — смешанное произведение векторов $\vec{r}'$, $\vec{r}''$, $\vec{r}'''$.

Упражнение 5.6. Доказать, что если $\varkappa=0$, то кривая лежит в соприкасающейся плоскости (плоская кривая).

Упражнение 5.7. Доказать, что кривая, для которой $k=0$, имеет вид

$$\vec{r}=\vec{\tau}s+\vec{r}_0, \tag{5.34}$$

где $\vec{r}^0$ — постоянный вектор.

Упражнение 5.8. Доказать, что при $\varkappa=0$ задание кривизны k как функции длины дуги s определяет линию на плоскости с точностью до произвольного перемещения на плоскости.

Упражнение 5.9. Линии, для которых $k=\text{const}$, $\varkappa=\text{const}$, носят название *винтовых линий.* Найти параметрические уравнения винтовых линий.

Упражнение 5.10. При интегрировании уравнений Френе (5.29) нужно учитывать условия ортонормированности трехгранника Френе

$$\vec{\tau}^2=\vec{\nu}^2=\vec{\beta}^2=1,\ \vec{\tau}\cdot\vec{\nu}=\vec{\nu}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\tau}=0, \tag{5.35}$$

т. е. на девять координат векторов трехгранника накладывается шесть соотношений. Независимых координат, определяющих поворот трехгранника около точки M, только три. Найти три угла, являющихся независимыми параметрами задания трехгранника Френе (углы Эйлера).

§ 6. Тензор кривизны

Интуитивно ясно, чем, например, кривая отличается от прямой, поверхность от плоскости. Т. е. наблюдая в трехмерном пространстве геометрические образования меньшего числа измерений, мы под искривленностью понимаем их отличие от некоторых обра-