Упражнение 5.4. Доказать, что

$$\vec{\beta}=\vec{\tau}\times\vec{\nu}. \tag{5.32}$$

Упражнение 5.5. Доказать, что

$$\varkappa=\frac{S(\vec{r}'\wedge\vec{r}''\wedge\vec{r}''')}{(\vec{r}'\times\vec{r}'')^2}, \tag{5.33}$$

где штрих означает производную радиус-вектора по параметру s, $S(\vec{r}'\wedge\vec{r}''\wedge\vec{r}''')$ — смешанное произведение векторов $\vec{r}'$, $\vec{r}''$, $\vec{r}'''$.

Упражнение 5.6. Доказать, что если $\varkappa=0$, то кривая лежит в соприкасающейся плоскости (плоская кривая).

Упражнение 5.7. Доказать, что кривая, для которой $k=0$, имеет вид

$$\vec{r}=\vec{\tau}s+\vec{r}_0, \tag{5.34}$$

где $\vec{r}^0$ — постоянный вектор.

Упражнение 5.8. Доказать, что при $\varkappa=0$ задание кривизны k как функции длины дуги s определяет линию на плоскости с точностью до произвольного перемещения на плоскости.

Упражнение 5.9. Линии, для которых $k=\text{const}$, $\varkappa=\text{const}$, носят название *винтовых линий.* Найти параметрические уравнения винтовых линий.

Упражнение 5.10. При интегрировании уравнений Френе (5.29) нужно учитывать условия ортонормированности трехгранника Френе

$$\vec{\tau}^2=\vec{\nu}^2=\vec{\beta}^2=1,\ \vec{\tau}\cdot\vec{\nu}=\vec{\nu}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\tau}=0, \tag{5.35}$$

т. е. на девять координат векторов трехгранника накладывается шесть соотношений. Независимых координат, определяющих поворот трехгранника около точки M, только три. Найти три угла, являющихся независимыми параметрами задания трехгранника Френе (углы Эйлера).

§ 6. Тензор кривизны

Интуитивно ясно, чем, например, кривая отличается от прямой, поверхность от плоскости. Т. е. наблюдая в трехмерном пространстве геометрические образования меньшего числа измерений, мы под искривленностью понимаем их отличие от некоторых образований того же числа измерений, определяемых нами как плоские. Но можно ли определить кривизну пространства, не сравнивая это пространство с другим и не выходя для определения этого понятия в пространство бо́льшего числа измерений, или, как говорят, является ли кривизна внутренним свойством пространства?

Попробуем сделать понятие искривленности пространства более конкретным. А именно назовем пространство $\mathscr{V}_n$ *уплощенным*, если метрическую форму можно выразить в виде

$$\Phi=\varepsilon_{(1)}(d\alpha^1)^2+\varepsilon_{(2)}(d\alpha^2)^2+\ \ldots\ +\varepsilon_{(n)}(d\alpha^n)^2, \qquad (6.1)$$

где знаковые числа $\varepsilon_{(i)}$ равны либо $+1$, либо -1. Пространства $\mathscr{V}_n$, для которых невозможно выразить метрику в виде (6.1), будем считать искривленными.

С позиций «внешней» геометрии мы предъявляем к понятию «уплощенного» пространства более жесткие требования. Так, например, рассматривая прямой круговой цилиндр радиуса a в трехмерном евклидовом пространстве, можно задать его метрику в виде (рис. 16)

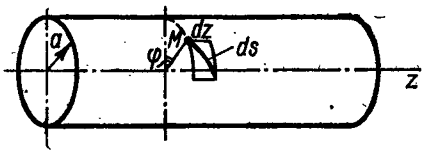

Рис. 16

$$ds^2=dz^2+a^2d\varphi^2, \qquad (6.2)$$

т. е. с точки зрения определения (6.1) поверхность такого цилиндра является уплощенным двумерным пространством.

Другими словами, мы будем считать $\mathscr{V}_n$ уплощенным, если существует такое преобразование системы координат, которое приводит метрическую форму

$$ds^2=\varepsilon\Phi=\varepsilon g_{ij}d\alpha^i d\alpha^j \qquad (6.3)$$

к виду (6.1). Из алгебры хорошо известно, что существует такое преобразование в каждой отдельной точке M, однако нас интересует преобразование, которое переводит (6.3) в (6.1) во всех точках $\mathscr{V}_n$ одновременно.

Упражнение 6.1. Вводя соответствующую замену переменных, доказать, что всякое пространство $\mathscr{V}_n$ с метрикой (6.3) «вложено» в уплощенное пространство $\frac{n(n+1)}{2}$ числа измерений. ●

Пусть A_i — произвольный ковариантный вектор. Тогда имеем согласно (4.27)

$$A_{i,j} = \frac{\partial A_i}{\partial \alpha^j} - \Gamma^l_{ij} A_l. \tag{6.4}$$

Вычисляя ковариантную производную тензора $A_{i,j}$, получим

$$A_{i,jk} = \frac{\partial A_{i,j}}{\partial \alpha^k} - \Gamma^l_{ik} A_{l,j} - \Gamma^l_{jk} A_{i,l}. \tag{6.5}$$

Поменяв местами индексы j и k, из (6.5) получим

$$A_{i,kj} = \frac{\partial A_{i,k}}{\partial \alpha^j} - \Gamma^l_{ij} A_{l,k} - \Gamma^l_{jk} A_{i,l}. \tag{6.6}$$

Вычитая из (6.5) выражение (6.6), найдем

$$A_{i,jk} - A_{i,kj} = -\frac{\partial}{\partial \alpha^k}(\Gamma^l_{ij} A_l) - \Gamma^l_{ik} A_{l,j} + \\ + \frac{\partial}{\partial \alpha^j}(\Gamma^l_{ik} A_l) + \Gamma^l_{ij} A_{l,k}. \tag{6.7}$$

Определим теперь тензор кривизны Римана 2-го рода $R_{ijk}{}^l$ формулой

$$A_{i,jk} - A_{i,kj} \equiv R_{jki}{}^l A_l. \tag{6.8}$$

То, что $R_{jki}{}^l$ действительно является тензором 4-го ранга, следует из обратного тензорного признака (гл. 1, § 3), хотя это можно проверить и непосредственно. Сравнивая (6.7) и (6.8), имеем

$$R^l_{jki} \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha^j} \Gamma^l_{ki} - \frac{\partial}{\partial \alpha^k} \Gamma^l_{ji} + \Gamma^m_{ki} \Gamma^l_{mj} - \\ - \Gamma^m_{ji} \Gamma^l_{mk} \equiv 2 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha^j} \Gamma^l_{ki} + \Gamma^m_{ki} \Gamma^l_{mj} \right]_{[jk]}, \tag{6.9}$$

где $[jk]$ означает, что в выражении, заключенном в квадратные скобки, необходимо провести операцию альтернирования по индексам j, k (гл. 1, § 3).

Упражнение 6.2. Пусть в пространстве $\mathscr{V}_n$ выбрана двумерная поверхность

$$\alpha^i = \alpha^i(u, v) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.10}$$

где u, v — параметры. Пусть в каждой точке этой поверхности задан вектор B^i. Вычислив вторые абсолютные производные, доказать, что

$$\frac{D^2B^i}{du\,dv} - \frac{D^2B^i}{dv\,du} = R^i_{jkl} \frac{\partial\alpha^j}{\partial u} \frac{\partial\alpha^k}{\partial v} B^l. \; \bullet \tag{6.11}$$

Теперь мы можем отчасти ответить на вопрос, когда пространство $\mathscr{V}_n$ будет уплощенным. Так как в уплощенном пространстве должна существовать декартова система координат (что вытекает из формулы (6.1)), а в этой системе координат, как мы знаем, все символы Кристоффеля обращаются в нуль, то согласно (6.9) компоненты тензора Римана в этой системе координат равны нулю. Но поскольку он является тензором, его компоненты в любой другой системе координат обращаются в нуль (упр. 3.1). Следовательно, для того чтобы пространство $\mathscr{V}_n$ было уплощенным, необходимо, чтобы

$$R_{ljk}{}^{l} = 0. \tag{6.12}$$

Достаточное условие будет нами разобрано в дальнейшем.

Для запоминания формулы (6.9) выражения компонент тензора Римана 2-го рода через символы Кристоффеля 2-го рода обратим внимание, что нужно записать сумму двух членов: производную по координате символа Кристоффеля 2-го рода и произведение двух символов Кристоффеля 2-го рода. В п е р в о м члене порядок расстановки индексов таков же, как и в левой части, а во в т о р о м члене у первого сомножителя записываются внизу два внутренних индекса левой части, а сверху — немой индекс, по которому ведется суммирование. Тогда индексы во втором сомножителе расстанавливаются автоматически. Затем следует со знаком минус дописать еще два члена, образованные из первых заменой первых двух индексов ($j \leftrightarrow k$).

Таким образом, тензор Римана 2-го рода кососимметричен по первым двум индексам

$$R_{jki}{}^{l} = -R_{kji}{}^{l}. \tag{6.13}$$

Упражнение 6.3. Проверить справедливость тождества

$$R_{jki}{}^{l}+R_{ijk}{}^{l}+R_{kij}{}^{l}=0. \quad ● \tag{6.14}$$

Тензором кривизны Римана 1-го рода называется четырежды ковариантный тензор, образованный из тензора Римана 2-го рода опусканием последнего индекса

$$R_{jkim}=R_{jki}{}^{l}g_{lm}. \tag{6.15}$$

Подставляя в (6.15) выражение (6.9) и учитывая тождество (3.24), получим

$$R_{jkim}=2\left[\frac{\partial}{\partial\alpha^{j}}\Gamma_{ki,m}-\Gamma^{l}_{ki}\Gamma_{jl,m}\right]_{[jk]}\equiv$$

$$\equiv\frac{\partial}{\partial\alpha^{j}}\Gamma_{ki,m}-\frac{\partial}{\partial\alpha^{k}}\Gamma_{ji,m}-\Gamma^{l}_{ki}\Gamma_{jl,m}+\Gamma^{l}_{ji}\Gamma_{kl,m}. \tag{6.16}$$

Подставляя теперь в (6.16) выражение (3.17) и учитывая (3.18), получим

$$R_{jkim}=\left[\frac{\partial^{2}g_{km}}{\partial\alpha^{j}\,\partial\alpha^{i}}+\frac{\partial^{2}g_{ji}}{\partial\alpha^{k}\,\partial\alpha^{m}}+2^{lq}\Gamma_{ji,l}\Gamma_{km,q}\right]_{[jk]}\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^{2}g_{km}}{\partial\alpha^{j}\,\partial\alpha^{i}}+\frac{\partial^{2}g_{ji}}{\partial\alpha^{k}\,\partial\alpha^{m}}-\frac{\partial^{2}g_{ki}}{\partial\alpha^{j}\,\partial\alpha^{m}}-\frac{\partial^{2}g_{jm}}{\partial\alpha^{k}\,\partial\alpha^{i}}\right)+$$

$$+g^{lq}\left(\Gamma_{ji,l}\Gamma_{km,q}-\Gamma_{ki,l}\Gamma_{jm,q}\right). \tag{6.17}$$

Упражнение 6.4. Доказать, что

$$R_{jkim}=-R_{kjim}=-R_{jkmi}. \tag{6.18}$$

Упражнение 6.5. Доказать, что

$$R_{jkim}=R_{imjk}. \tag{6.19}$$

Упражнение 6.6. Доказать тождество

$$R_{jkim}+R_{ijkm}+R_{kijm}=0. \tag{6.20}$$

Упражнение 6.7. Доказать, что в пространстве $\mathscr{V}_2$ все компоненты тензора Римана 1-го рода либо выражаются через компоненту R_{1212}, либо равны нулю.

Упражнение 6.8. Доказать тождества Бианки:

$$R_{jkim,q}+R_{qjim,k}+R_{kqim,j}=0, \tag{6.21}$$

$$R_{jki}{}^{l}{}_{,q}+R_{qji}{}^{l}{}_{,k}+R_{kqi}{}^{l}{}_{,j}=0. \tag{6.22}$$

Упражнение 6.9. Используя формулы (6.18) — (6.20), доказать, что число независимых компонент тензора Римана 1-го рода N в пространстве $\mathscr{V}_n$, $n > 1$, равно

$$N = \frac{n^2(n^2-1)}{12}. \quad \bullet \tag{6.23}$$

В силу высокой симметрии тензора Римана среди n^4 его компонент только N (6.23) независимых. Так, в $\mathscr{V}_3$ их всего шесть, а в $\mathscr{V}_2$ только одна. Поэтому иногда удобно пользоваться другими тензорами меньшего ранга, образованными из тензоров Римана.

Тензором Ричи называется тензор второго ранга, образованный из тензоров Римана одним из следующих способов:

$$R_{kl} = R_{jkl}{}^{j} = R_{jklm} g^{jm}. \tag{6.24}$$

Упражнение 6.10. Используя определение тензора Ричи (6.24) и формулу (4.36), доказать, что

$$R_{kl} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^k \partial a^l} \ln g - \frac{1}{2} \Gamma^j_{kl} \frac{\partial}{\partial a^j} \ln g - \\ - \frac{\partial}{\partial a^j} \Gamma^j_{kl} + \Gamma^j_{kq} \Gamma^q_{jl}, \tag{6.25}$$

откуда следует, что тензор Ричи — симметричный тензор.

Упражнение 6.11. Умножая (6.21) на $g^{jm} g^{kl}$, показать, что

$$g^{kl} R_{kl,q} - g^{kl} R_{ql,k} - g^{jm} R_{qm,j} = 0. \quad \bullet \tag{6.26}$$

В частности, для двумерного пространства $\mathscr{V}_2$ из (6.24) имеем

$$R_{11} = g^{22} R_{2112}, \; R_{12} = g^{12} R_{2121}, \; R_{22} = g^{11} R_{1221}. \tag{6.27}$$

Но так как для $\mathscr{V}_2$ компоненты тензора g^{ij} имеют вид

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = -\frac{g_{21}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}, \tag{6.28}$$

то

$$g R_{ij} = -g_{ij} R_{1212} \quad (i, j = 1, 2), \tag{6.29}$$

т. е. в $\mathscr{V}_2$ компоненты тензора Ричи пропорциональны компонентам метрического тензора.

Скалярная величина

$$R = g^{ij} R_{ij} = R_i{}^i \quad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{6.30}$$

называется *инвариантом кривизны.* Из (6.29) вытекает, что для $n=2$

$$R=-\frac{2}{g}R_{1212}, \tag{6.31}$$

а также

$$\frac{1}{g}\epsilon^{ij}\epsilon^{kl}R_{ijkl}=-\frac{R}{2}\quad (i,\ j,\ k,\ l=1,\ 2). \tag{6.32}$$

В трехмерном пространстве $\mathscr{V}_3$ вводят так называемый *тензор несовместности*

$$\eta^{il}=\frac{1}{g}\epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}R_{klmn}\quad (i,\ j,\ k,\ l,\ m,\ n=1,\ 2,\ 3). \tag{6.33}$$

Используя определение (6.30), тождество (6.26) для произвольного $\mathscr{V}_n$ можно записать в виде

$$R_{,q}-2R_{q,j}{}^{j}=0, \tag{6.34}$$

или

$$\left(R_q^j-\frac{1}{2}R\delta_q^j\right)_{,j}=0. \tag{6.35}$$

Тензором Эйнштейна называется тензор

$$G_q^j\equiv R_q^j-\frac{1}{2}R\delta_q^j. \tag{6.36}$$

Тогда тождество (6.34), часто используемое в теории относительности, можно записать в виде равенства нулю дивергенции тензора Эйиштейиа

$$G^j{}_{q,j}=0. \tag{6.37}$$

§ 7. Геометрический смысл теизора кривизны

Пусть M_1 и M_2 — две точки риманова пространства $\mathscr{V}_n$, а C_1 и C_2 — два различных контура (линии), соединяющие эти точки (рис. 17).

Пусть кривые C_1 и C_2 заданы параметрически в виде

$$C_1:\alpha^i=\varphi^i(u);\ C_2:\alpha^i=\psi^i(u), \tag{7.1}$$

$$u_1\leqslant u\leqslant u_2.$$

При этом значение параметра $u=u_1$ соответствует точке M_1, а значение $u=u_2$ — точке M_2.