называется *инвариантом кривизны*. Из (6.29) вытекает, что для $n=2$

$$R=-\frac{2}{g}R_{1212}, \tag{6.31}$$

а также

$$\frac{1}{g}\epsilon^{ij}\epsilon^{kl}R_{ijkl}=-\frac{R}{2} \quad (i,\ j,\ k,\ l=1,\ 2). \tag{6.32}$$

В трехмерном пространстве $\mathscr{V}_3$ вводят так называемый *тензор несовместности*

$$\eta^{il}=\frac{1}{g}\epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}R_{klmn} \quad (i,\ j,\ k,\ l,\ m,\ n=1,\ 2,\ 3). \tag{6.33}$$

Используя определение (6.30), тождество (6.26) для произвольного $\mathscr{V}_n$ можно записать в виде

$$R_{,q}-2R_{q,j}{}^{j}=0, \tag{6.34}$$

или

$$\left(R^j_q-\frac{1}{2}R\delta^j_q\right)_{,j}=0. \tag{6.35}$$

Тензором Эйнштейна называется тензор

$$G^j_q\equiv R^j_q-\frac{1}{2}R\delta^j_q. \tag{6.36}$$

Тогда тождество (6.34), часто используемое в теории относительности, можно записать в виде равенства нулю дивергенции тензора Эйиштейиа

$$G^j{}_{q,j}=0. \tag{6.37}$$

§ 7. Геометрический смысл теизора кривизны

Пусть M_1 и M_2 — две точки риманова пространства $\mathscr{V}_n$, а C_1 и C_2 — два различных контура (линии), соединяющие эти точки (рис. 17).

Пусть кривые C_1 и C_2 заданы параметрически в виде

$$C_1 : \alpha^i=\varphi^i(u);\ C_2 : \alpha^i=\psi^i(u), \tag{7.1}$$

$$u_1\leqslant u\leqslant u_2.$$

При этом значение параметра $u=u_1$ соответствует точке M_1, а значение $u=u_2$ — точке M_2.

Выберем теперь в точке M_1 некоторый вектор $a_{(0)}{}^i$ и перенесем его параллельно вдоль линии C_1. Тогда в точке M_2 получим вектор $a_{(1)}{}^i$. Если перенесем вектор $a_{(0)}{}^i$ параллельно вдоль линии C_2, то в точке M_2 получим значения $a_{(2)}{}^i$, вообще говоря, отличные от $a_{(1)}{}^i$. Обозначим разность этих значений через

$$\Delta a^i(M_2) = a_{(2)}{}^i - a_{(1)}{}^i. \tag{7.2}$$

Для того чтобы вычислить эту разность, создадим однопараметрическое семейство кривых, соединяющих точки M_1 и M_2 (будем предполагать рассматриваемую область $\mathscr{V}_n$ односвязной), причем параметр u каждой кривой изменяется в том же диапазоне (7.1), что и у кривых C_1 и C_2. Иначе говоря, кривые C_1 и C_2 принадлежат введенному семейству.

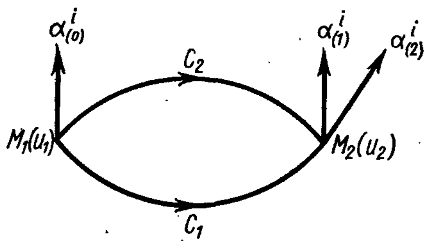

Рис 17

Будем считать, что параметр v, по которому одна кривая семейства отличается от другой, принимает значение v_1 для кривой C_1 и v_2 для кривой C_2. Итак, уравнения кривых семейства задаются в параметрическом виде следующим образом:

$$\alpha^i = f^i(u, v), \; u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \; v_1 \leqslant v \leqslant v_2. \tag{7.3}$$

При этом

$$f^i(u, v_1) = \varphi^i(u), \; f^i(u, v_2) = \psi^i(u) \tag{7.4}$$

и, кроме того, в точках M_1 и M_2

$$f^i(u_1, v) = \varphi^i(u_1) = \psi^i(u_1), \tag{7.5}$$

$$f^i(u_2, v) = \varphi^i(u_2) = \psi^i(u_2). \tag{7.6}$$

Другими словами, для точек M_1 и M_2

$$\frac{\partial \alpha^i}{\partial v} = 0 \text{ при } u = u_1 \text{ и } u = u_2. \tag{7.7}$$

Теперь перенесем параллельно вдоль каждой кривой семейства вектор $a_{(0)}{}^i$. Тогда получим векторное поле a^i, заданное на двумерной поверхности $\mathscr{V}_n$, всюду однозначное, кроме, быть может, точки M_2. Это векторное поле подчиняется уравнению

$$\frac{Da^i}{\partial u} = 0, \tag{7.8}$$

откуда

$$\frac{D^2a^i}{\partial v\, \partial u} = 0. \tag{7.9}$$

Кроме того, в точке M_1

$$\frac{Da^i}{\partial v} = 0 \quad \text{при } u = u_1. \tag{7.10}$$

Это равенство вытекает из формулы (4.12), если учесть (7.7) и то, что в точке M_1

$$\frac{\partial a^i}{\partial v} = \frac{\partial a^i_{(0)}}{\partial v} = 0. \tag{7.11}$$

Пусть теперь b_i — произвольный вектор в точке M_2. Перенесем его параллельно вдоль всех кривых $v = \text{const}$ параллельным образом до точки M_1. Тогда

$$\frac{Db_i}{\partial u} = 0. \tag{7.12}$$

Образуем теперь скаляр (инвариант) a^ib_i. Тогда в силу того, что в точке M_2 вектор b_i определен однозначно и для скаляра частная производная по параметру совпадает с абсолютной производной, получим

$$\Delta a^i (M_2)\, b_i (M_2) \equiv \int\limits_{v_1}^{v_2} \left[\frac{\partial}{\partial v} (a^ib_i) \right]_{u=u_2} dv =$$

$$= \int\limits_{v_1}^{v_2} \left[\frac{Da^i}{\partial v} b_i \right]_{u=u_2} dv. \tag{7.13}$$

Подынтегральное выражение правой части (7.13) запишем в виде

$$\left[\frac{Da^i}{\partial v}b_i\right]_{u=u_2}=\left[\frac{Da^i}{\partial v}b_i\right]_{u=u_1}+$$

$$+\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{Da^i}{\partial v}b_i\right]du. \qquad (7.14)$$

В силу (7.10) первое слагаемое правой части (7.14) обращается в нуль, а второе слагаемое согласно (6.11) и (7.12) запишем следующим образом:

$$\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{Da^i}{\partial v}b_i\right]du=\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{D^2a^i}{\partial u\,\partial_v}b_i\,du=$$

$$=\int\limits_{u_1}^{u_2}\left[\frac{D^2a^i}{\partial v\,\partial u}+R_{klj}{}^i\frac{\partial\alpha^k}{\partial u}\frac{\partial\alpha^l}{\partial v}a^j\right]b_i\,du=$$

$$=\int\limits_{u_1}^{u_2}R_{klj}^{\;\;\;i}\frac{\partial\alpha^k}{\partial u}\frac{\partial\alpha^l}{\partial v}a^jb_i\,du, \qquad (7.15)$$

где учтено еще условие (7.9).

Итак, выражение (7.13) имеет вид

$$\Delta a^i(M_2)\,b_i(M_2)=\iint R_{klj}^{\;\;\;i}a^jb_i\frac{\partial\alpha^k}{\partial u}\frac{\partial\alpha^l}{\partial v}du\,dv, \quad (7.16)$$

где интегрирование берется по всей двумерной поверхности, образованной семейством (7.3).

В точке M_2 имеются три вектора: b_i, $a_{(1)}{}^i$, $a_{(2)}{}^i$. Если теперь перенесем их параллельно вдоль C_2 в точку M_1, то в точке M_1 получим соответственно три вектора $b_i^{(2)}$, $a_{(0)}{}^i+\Delta a^i(M_1)$, $a_{(0)}{}^i$. Но скалярные величины при параллельном перенесении не изменяются. Поэтому так как из (7.2)

$$\Delta a^i(M_2)\;\;b_i(M_2)=[a_{(2)}{}^i-a_{(1)}{}^i]\,b_i(M_2), \qquad (7.17)$$

то, подставляя в правую часть (7.17) значения векторов, полученные параллельным перенесением в точку M_1, имеем равенство

$$\Delta a^i(M_2)\,b_i(M_2)=-\Delta a^i(M_1)\,b_i^{(2)}. \qquad (7.18)$$

Вектор b_i в точке M_2 был выбран произвольно. Поэтому вышесказанному можно дать следующую трактовку. Рассмотрим контур C, состоящий из контура C_1 (от точки M_1 до M_2) и контура C_2 (от точки M_2 до M_1).

Пусть M_1 — произвольная точка в $\mathscr{V}_n$ и пусть $\mathscr{V}_2$ — двумерное пространство, содержащее точку M_1. Пусть C — замкнутая кривая, лежащая в $\mathscr{V}_2$ и проходящая через M_1, причем выбрано положительное направление обхода этой кривой, указанное выше. Далее, пусть M_2 — произвольная точка кривой C, отличная от M_1, которую можно соединить с точкой M_1 семейством кривых, лежащих в $\mathscr{V}_2$. Пусть, наконец, $b_i^{(2)}$ — произвольный вектор, выбранный в точке M_1, перенесенный параллельно вдоль отрицательного направления кривой C до точки M_2, а затем вдоль кривой данного семейства. Тогда произвольный вектор a^i в точке M_1 после параллельного перенесения вдоль положительного направления по замкнутой кривой C получит приращение Δa^i

$$\Delta a^i b_i^{(2)} = -\iint R_{klj}^{\ \ \ i} a^j b_i \frac{\partial \alpha^k}{\partial u} \frac{\partial \alpha^l}{\partial v}\, du\, dv, \qquad (7.19)$$

где интегрирование ведется по $\mathscr{V}_2$, ограниченному контуром C.

Если будем стягивать этот контур к точке M_1, то правую часть в (7.19) можно представить с точностью до величин высшего порядка малости в виде

$$-b_i^{(2)} \iint R_{klj}^{\ \ \ i} a^j \frac{\partial \alpha^k}{\partial u} \frac{\partial \alpha^l}{\partial v}\, du\, dv. \qquad (7.20)$$

Или, учитывая произвольность вектора $b_i^{(2)}$, для бесконечно малого контура получим

$$\Delta a^i = -R_{klj}^{\ \ \ i} a^j \underset{(u)}{d} \alpha^k \underset{(v)}{d} \alpha^l, \qquad (7.21)$$

где

$$\underset{(u)}{d} \alpha^k = \frac{\partial \alpha^k}{\partial u} du, \quad \underset{(v)}{d} \alpha^l = \frac{\partial \alpha^l}{\partial v} dv. \qquad (7.22)$$

Упражнение 7.1. Доказать, что для произвольных векторов a^i, b_i, параллельно переносимых вдоль некоторого семейства кривых, соединяющих точки M_1 и M_2, интегралы $\mathscr{I}_1$ и $\mathscr{I}_2$

$$\mathscr{I}_1 = \int_{M_1}^{M_2} g_{ij} a^i d\alpha^j, \quad \mathscr{I}_2 = \int_{M_1}^{M_2} b_i\, d\alpha^i \qquad (7.23)$$

не зависят от пути интегрирования, если выполняются условия в $\mathscr{V}_n$

$$R_{klj}{}^{i}=0. \quad \bullet \tag{7.24}$$

Итак, если выполняются условия (7.24), то пространство $\mathscr{V}_n$ является уплощенным. В самом деле, тогда во всем пространстве $\mathscr{V}_n$ можно выбрать в одной-единственной точке M_1 некоторый вектор $a^i(M^1)$ или $b_i(M_1)$, параллельным их перенесением получить однозначные векторные поля a^i, b_i во всем $\mathscr{V}_n$. Если мы выберем n ортонормированных векторов $e_{(l)j}$ в точке M_1, т. е. выполняются условия

$$g^{ij}e_{(k)i}e_{(l)j}=\varkappa_{kl}, \tag{7.25}$$

где $\varkappa_{kl}=0$ для $k\neq l$ и $\varkappa_{kl}=\varepsilon_{(k)}$ для $k=l$ (где $\varepsilon_{(k)}$ — знаковое число вектора $e_{(k)}{}^{i}$), тогда, переиося параллельным образом n векторов $e_{(l)j}$, в каждой точке M пространства $\mathscr{V}_n$ получим n векторных полей и можем ввести систему координат

$$x_k=\int\limits_{M_1}^{M} e_{(k)i}\,d\alpha^i. \tag{7.26}$$

Из предыдущего следует, что для точки M, бесконечно близкой к M_1, имеем

$$dx_k=e_{(k)i}d\alpha^i, \tag{7.27}$$

или

$$\frac{\partial x_k}{\partial \alpha^i}=e_{(k)i}. \tag{7.28}$$

Тогда, сравнивая с (7.25), получим

$$g^{ij}\frac{\partial x_k}{\partial \alpha^i}\frac{\partial x_l}{\partial \alpha^j}=\varkappa_{kl}, \tag{7.29}$$

и за систему координат в $\mathscr{V}_n$ можно приинять x_k, причем на (7.29) можно смотреть как на переход компонент метрического тензора от одной системы координат к другой, т. е.

$$g_{kl}=\varkappa_{kl}. \tag{7.30}$$

Поэтому метрическая форма имеет вид

$$\Phi=\varepsilon_{(1)}(dx_1)^2+\varepsilon_{(2)}(dx_2)^2+\ldots+\varepsilon_{(n)}(dx_n)^2. \tag{7.31}$$

Итак, условия (7.24) являются достаточными условиями того, чтобы пространство $\mathscr{V}_n$ было уплощенным.

Упражнение 7.2. Пусть в пространстве $\mathscr{V}_3$ компоненты метрического тензора имеют вид

$$g_{ij}=\delta_{ij}+2\varepsilon_{ij}, \tag{7.32}$$

где δ_{ij} — символы Кронекера, а ε_{ij} — малые величины, такие, что их произведением можно пренебречь по сравнению с первыми степенями. Доказать, что в этом случае условие (7.24) равносильно условию

$$\mathscr{I}nk\underset{\sim}{\varepsilon}=0 \tag{7.33}$$

(гл. 3, (7.19)).

Упражнение 7.3. Пусть в евклидовом пространстве $\mathscr{R}_3$ выбран в некоторой точке базис $\vec{e}_i$ и задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial \alpha^j}=\Gamma_{ij}^k \vec{e}_k, \tag{7.34}$$

где Γ_{ij}^k считаются заданными функциями координат. Доказать, что условиями интегрируемости системы (7.34) являются условия (7.24).

Упражнение 7.4. Пусть в ортогональной системе координат в $\mathscr{V}_2$ дано

$$ds^2=g_{11}(d\alpha^1)^2+g_{22}(d\alpha^2)^2. \tag{7.35}$$

Доказать, что

$$\frac{1}{g}R_{1212}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha^1}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{22}}{\partial\alpha^1}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\alpha^2}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{11}}{\partial\alpha^2}\right)\right\}. \; \bullet \tag{7.36}$$

Понятие ковариантной производной можно ввести и без введения метрики. А именно, если считать заданными символы Кристоффеля 2-го рода как функции координат, для которых справедливы формулы (4.7), то говорят, что в n-мерном пространстве введена связность $\Gamma_{ij}^k(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$, а само пространство иосит название *пространства аффинной связности.* При этом коэффициенты связности не обязательно являются симметричными.

Упражнение 7.5. Доказать, что величины

$$S_{ij}^k=\Gamma_{[ij]}^k=\frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k-\Gamma_{ji}^k) \tag{7.37}$$

образуют тензор. Этот тензор носит название *тензора кручения.*

§ 8. Поверхности в трехмерном евклидовом пространстве

Важным случаем риманова пространства является двумерная поверхность в обычном трехмерном евклидовом пространстве. Рассмотрим достаточно гладкие поверхности, т. е. будем считать, что функции

$$\vec{r}=\vec{r}(\alpha^1, \alpha^2), \tag{8.1}$$

с помощью которых параметрически задается поверхность, являются достаточное число раз дифференцируемыми. Под $\vec{r}$ понимаем радиус-вектор трехмерного евклидова пространства, т. е. вектор, который в ортонормированном репере $\vec{k}_I$ имеет вид

$$\vec{r}=x^I\vec{k}_I \quad (I=1, 2, 3). \tag{8.2}$$

(В этом параграфе считаем, что индексы, изображающиеся малыми латинскими буквами, пробегают значения от 1 до 2, а индексы, изображающиеся большими латинскими буквами, пробегают значения от 1 до 3.) Будем считать, что в каждой точке поверхности (8.1) векторы

$$\vec{r}_i=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^i} \quad (i=1,\ 2) \tag{8.3}$$

некомпланарные и потому могут быть приняты за векторы локального репера. Метрический тензор поверхности задается формулами

$$g_{ij}=\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j. \tag{8.4}$$

Плоскость, в которой лежат векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, называется касательной плоскостью поверхности (8.1) в точке M. (Заметим, что касательная плоскость является частным случаем касательного евклидова пространства в точке M риманова пространства $\mathscr{V}_2$.)

Для рассматриваемого случая определитель метрического тензора (8.4) имеет вид

$$g=g_{11}g_{22}-g_{12}^2. \tag{8.5}$$