образуют тензор. Этот тензор носит название *тензора кручения.*

§ 8. Поверхности в трехмерном евклидовом пространстве

Важным случаем риманова пространства является двумерная поверхность в обычном трехмерном евклидовом пространстве. Рассмотрим достаточно гладкие поверхности, т. е. будем считать, что функции

$$\vec{r}=\vec{r}(\alpha^1, \alpha^2), \tag{8.1}$$

с помощью которых параметрически задается поверхность, являются достаточное число раз дифференцируемыми. Под $\vec{r}$ понимаем радиус-вектор трехмерного евклидова пространства, т. е. вектор, который в ортонормированном репере $\vec{k}_I$ имеет вид

$$\vec{r}=x^I\vec{k}_I \quad (I=1, 2, 3). \tag{8.2}$$

(В этом параграфе считаем, что индексы, изображающиеся малыми латинскими буквами, пробегают значения от 1 до 2, а индексы, изображающиеся большими латинскими буквами, пробегают значения от 1 до 3.) Будем считать, что в каждой точке поверхности (8.1) векторы

$$\vec{r}_i=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^i} \quad (i=1,\ 2) \tag{8.3}$$

некомпланарные и потому могут быть приняты за векторы локального репера. Метрический тензор поверхности задается формулами

$$g_{ij}=\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j. \tag{8.4}$$

Плоскость, в которой лежат векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, называется касательной плоскостью поверхности (8.1) в точке M. (Заметим, что касательная плоскость является частным случаем касательного евклидова пространства в точке M риманова пространства $\mathscr{V}_2$.)

Для рассматриваемого случая определитель метрического тензора (8.4) имеет вид

$$g=g_{11}g_{22}-g_{12}^2. \tag{8.5}$$

Будем считать, что метрическая форма

$$ds^2 = g_{ij} da^i da^j \qquad (8.6)$$

является положительно-определенной. В теории поверхностей ее называют *первой квадратичной формой поверхности.* В каждой точке поверхности введем вектор нормали $\vec{n}$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{g}} \vec{r}_1 \times \vec{r}_2. \qquad (8.7)$$

Упражнение 8.1. Доказать, что вектор $\vec{n}$ (8.71) единичный, т. е.

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = n^I n_I = 1. \qquad (8.8)$$

Упражнение 8.2. Пусть поверхность вращения задается уравнением (рис. 18)

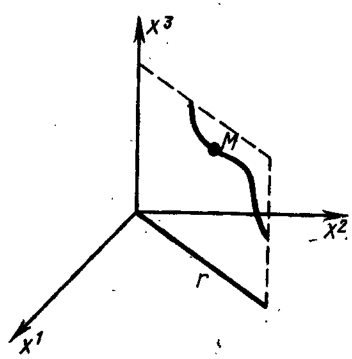

Рис. 18

$$x^3 = f(r). \qquad (8.9)$$

Найти метрический тензор этой поверхности и векторы $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{n}$. ●

Рассмотрим какую-либо кривую на поверхиости (8.1). Дифференцируя по длине дуги этой линии, получим единичный вектор касательной

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_i \frac{d\alpha^i}{ds}. \qquad (8.10)$$

Если продифференцировать по длине дуги вектор $\vec{\tau}$, то согласно (5.29) найдем вектор главной нормали кривой

$$k\vec{\nu} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha^j} \frac{\partial \alpha^i}{\partial s} \frac{d\alpha^j}{ds} + \vec{r}_i \frac{d^2\alpha^i}{ds^2}. \qquad (8.11)$$

Спроектируем вектор $k\vec{\nu}$ на нормаль к поверхности.

При этом положим $\cos\theta = \vec{\nu} \cdot \vec{n}$. (8.12)

Величину $k_n = k\cos\theta$ (8.13)

назовем *нормальной кривизной линии* на поверхности. Тогда из (8.11)

$$k_n = k\vec{\nu} \cdot \vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \vec{n} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \cdot \vec{n}. \qquad (8.14)$$

Обозначим теперь

$$\vec{r}_{ij} \equiv \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha^j}, \quad \vec{n}_i \equiv \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha^i}. \qquad (8.15)$$

Тогда, учитывая, что

$$d^2\vec{r} = \vec{r}_{ij} d\alpha^i d\alpha^j + \vec{r}_i d^2\alpha^i, \qquad (8.16)$$

получим

$$d^2\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_{ij} \cdot \vec{n} d\alpha^i d\alpha^j. \qquad (8.17)$$

Определим теизор второй квадратичной формы поверхности b_{ij} следующим образом:

$$b_{ij} = \vec{r}_{ij} \cdot \vec{n} = -\vec{r}_i \cdot \vec{n}_j. \qquad (8.18)$$

Квадратичная форма

$$\varphi_2 \equiv b_{ij} d\alpha^i d\alpha^j \qquad (8.19)$$

называется второй квадратичной формой поверхности.

Из (8.14) вытекает, что нормальная кривизна линии на поверхности определяется отношением второй и первой квадратичных форм поверхности

$$k_n = \frac{\varphi_2}{ds^2}. \qquad (8.20)$$

Формулы (8.20) можно переписать в виде

$$(b_{ij} - k_n g_{ij})\, da^i da^j = 0 \qquad (8.21)$$

Упражнение 8.3. Доказать, что все линии на поверхности, проходящие через точку M и имеющие общую касательиую, имеют одну и ту же нормальную кривизну k_n.

Упражнение 8.4. Доказать, что все линии на поверхиости, имеющие в точке M заданную соприкасающуюся плоскость (см. § 5), имеют в этой точке одну и ту же кривизну k.

Упражнение 8.5. Геодезической кривизной некоторой кривой на поверхности в точке M называется величина k_g

$$k_g = k \sin\theta. \qquad (8.22)$$

Доказать, что

$$k_g = k\vec{\nu} \cdot \vec{\tau}, \qquad (8.23)$$

и найти выражение для геодезической кривизны через векторы $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_{ij}$.

Упражнение 8.6. Радиусом кривизны ρ, радиусом нормальной кривизны ρ_n и радиусом геодезической кривизны ρ_g называются соответственно величины, определяющиеся выражениями

$$k = \frac{1}{\rho}, \quad k_n = \frac{1}{\rho_n}, \quad k_g = \frac{1}{\rho_g}. \qquad (8.24)$$

Доказать, что

$$\rho^2 = \rho_n^2 + \rho_g^2. \qquad (8.25)$$

Упражнение 8.7. Центром кривизны называется точка, удаленная по нормали от точки M на расстояние радиуса кривизны. Пусть через вектор $\vec{\tau}$ в точке M проходят две плоскости: нормальная, т. е. проходящая через $\vec{n}$, и наклонная, образующая с первой угол θ. Доказать, что центр кривизны наклонного сечения является проекцией на плоскость сечения центра кривизны нормального сечения с той же касательной (теорема Менье). ●

Тензор b_{ij}, как следует из (8.18), является симметричным тензором второго ранга. Поэтому для него справедливы утверждения, доказанные в гл. 3. (При этом следует учесть, что тензор b_{ij} определен в двумерном пространстве.) В частности, тензор b_{ij} имеет два взаимно ортогональных главных направления, которым соответствуют главные значения $b_{(1)}$ и $b_{(2)}$ и которые называются главными направлениями поверхности.

Так как вектор $\vec{\tau}$ является единичным вектором

$$\tau^i = \frac{da^i}{ds}, \quad g_{ij}\tau^i\tau^j = 1, \tag{8.26}$$

то из (8.21) следует, что

$$k_n = b_{ij}\tau^i\tau^j, \tag{8.27}$$

т. е. значение второй квадратичной формы, соответствующее значению единичного вектора, равно нормальной кривизне, отвечающей направлению этого вектора. Если $\vec{\tau}_{(1)}$, $\vec{\tau}_{(2)}$ — единичные векторы, характеризующие главные направления тензора b_{ij}, то из (8.21) следует, что главные значения тензора b_{ij} равны значениям нормальной кривизны, отвечающим главным направлениям поверхности

$$k_{(1)} \equiv \frac{1}{\rho_{(1)}} = b_{ij}\tau^i_{(1)}\tau^j_{(1)},$$

$$k_{(2)} \equiv \frac{1}{\rho_{(2)}} \equiv b_{ij}\tau^i_{(2)}\tau^j_{(2)}. \tag{8.28}$$

Эти значения $k_{(1)}$ и $k_{(2)}$ называются *главными кривизнами поверхности* в данной точке.

Упражнение 8.8. Доказать, что формула Гамильтона — Кели для симметричного двумерного тензора второго ранга $\underset{\sim}{a}$ дает

$$\underset{\sim}{a}^2 = \underset{\sim}{a}\langle a\rangle - \underset{\sim}{\mathcal{I}}\,|a|. \quad \bullet \tag{8.29}$$

Таким образом, b_{ij}, как и всякий двумерный симметричный тензор второго ранга, имеет два независимых инварианта. Чаще всего за эти инварианты принимаются величины

$$2H = b_{ij}g^{ij} = b_i{}^i = k_{(1)} + k_{(2)}, \tag{8.30}$$

$$K = \frac{1}{2g}\,\epsilon^{ij}\epsilon^{kl}b_{ik}b_{jl} = \det|b^i_j| = k_{(1)}k_{(2)}, \tag{8.31}$$

называемые *средней кривизной* (H) и полной, или Гауссовой, кривизной (K).

Тензорная поверхность Коши для тензора b_{ij} называется *индикатрисой Дюпена.* Ее каноническое уравнение имеет вид

$$k_{(1)}(x^1)^2+k_{(2)}(x^2)^2=\pm 1. \tag{8.32}$$

Упражнение 8.9. Доказать формулу (Эйлера)

$$k_n=k_{(1)}\cos^2\varphi+k_{(2)}\sin^2\varphi, \tag{8.33}$$

где φ — угол между данным направлением и первым из главных направлений. ●

Как и всякая кривая второго порядка, индикатриса Дюпена может принадлежать к эллиптическому, гиперболическому или параболическому типу. В связи с этим точки поверхностей распределяются на три соответствующих класса. Чтобы определить, к какому классу принадлежит данная точка поверхности, достаточно вычислить коэффициенты второй квадратичной формы φ_2 в этой точке и составить дискриминант

$$\Delta=b_{11}b_{22}-b_{12}^2. \tag{8.34}$$

Если в данной точке $\Delta>0$, то точка эллиптическая; если $\Delta<0$, то гиперболическая; если $\Delta=0$, то параболическая. Если же в данной точке все $b_{ij}=0$, то точка называется *точкой уплощения.*

Упражнение 8.10. Доказать, что если в точке M $K>0$, то точка M — эллиптическая; если $K<0$, то гиперболическая; если $K=0$, то параболическая. ●

Линией кривизны называется линия, которая в каждой точке касается главного направления поверхности.

Упражнение 8.11. Доказать, что через каждую точку поверхности проходят две линии кривизны.

Упражнение 8.12. Доказать, что на каждой поверхности (кроме сферы) есть два семейства линий кривизны. Они всегда действительны и их можно выбрать в качестве ортогональной системы координат на поверхности.

Упражнение 8.13. Доказать: чтобы поверхность была отнесена к линиям кривизны, необходимо и достаточно, чтобы

$$g_{12}=0, \quad b_{12}=0. \; ● \tag{8.35}$$

Асимптотической линией на поверхности называется линия, нормальная кривизна которой в каждой ее точке равна нулю. Из (8.21) следует, что уравнение асимптотической линии имеет вид

$$b_{ij}d\alpha^i d\alpha^j = 0. \tag{8.36}$$

Упражнение 8.14. Доказать, что асимптотическая линия, состоящая из параболических точек или точек уплощения, является плоской кривой. ●

Разложим векторы $\vec{r}_{ij}$ по векторам локального репера $\vec{r}_i$ и $\vec{n}$:

$$\vec{r}_{ij} = G_{ij}^k \vec{r}_k + h_{ij}\vec{n}. \tag{8.37}$$

Для того чтобы определить коэффициенты разложения $G_{ij}{}^k$ и h_{ij}, умножим скалярно (8.37) на $\vec{r}_l$. Учитывая (8.18), получим

$$h_{ij} = b_{ij}. \tag{8.38}$$

Умножим теперь (8.37) скалярно на $\vec{r}_l$ и учтем очевидное равенство

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^l} = \vec{r}_{il}\cdot\vec{r}_j + \vec{r}_i\cdot\vec{r}_{jl}. \tag{8.39}$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^l} = G_{il}^k g_{kj} + G_{jl}^k g_{ik}. \tag{8.40}$$

Переставляя индексы i, j, l в (8.40) круговым порядком, получим

$$G_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^l}\right). \tag{8.41}$$

Сравнивая (8.41) с (3.17), находим

$$G_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k. \tag{8.42}$$

Далее, разлагая векторы $\vec{n}_i$ по векторам локального репера и учитывая, что векторы $\vec{n}_i$ ортогональны вектору $\vec{n}$ (см. упр. 2.6), имеем

$$\vec{n}_i = a_i{}^j \vec{r}_j. \tag{8.43}$$

Умножая (8.43) скалярно на $\vec{r}_k$ и учитывая (8.18), получим

$$a_i{}^j = -b_{ik}g^{kj} = -b_i{}^j. \tag{8.44}$$

Подставим теперь (8.38), (8.42) в (8.37), а (8.44) в (8.43)

$$\vec{r}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\vec{r}_k + b_{ij}\vec{n}, \tag{8.45}$$

$$\vec{n}_i = -b^j_i\vec{r}_j. \tag{8.46}$$

Формулы (8.45) и (8.46) носят название *деривационных уравнений*. Заметим, что формулу (8.45) можно переписать, используя определение ковариантиой производной, в виде

$$\vec{r}_{,ij} = b_{ij}\vec{n}. \tag{8.47}$$

Для иахождения условий интегрируемости дифференциальных уравнений (8.45) и (8.46) приравняем нулю внешние дифференциалы

$$Dd\vec{r}_i = 0, \quad Dd\vec{n} = 0. \tag{8.48}$$

Следствием уравнений (8.48) являются уравнения

$$\frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial\alpha^j\,\partial\alpha^k}\,d\alpha^j \wedge d\alpha^k = 0, \quad \frac{\partial^2\vec{n}}{\partial\alpha^i\,\partial\alpha^j}\,d\alpha^i \wedge d\alpha^j = 0. \tag{8.49}$$

Отсюда из первого уравнения (8.49)

$$\left\{\left(\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial\alpha^m} + \Gamma^n_{ij}\Gamma^k_{nm} - b_{ij}b_{mn}g^{nk}\right)\vec{r}_k + \right.$$

$$\left. + \left(\Gamma^k_{ij}b_{km} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial\alpha^m}\right)\vec{n}\right\}_{[jm]} = 0. \tag{8.50}$$

Но так как векторы $\vec{r}_k$ и $\vec{n}$ — линейно независимые, то из (8.50) следует

$$b_{i[j}b_{m]n}g^{nk} = R_{mji}^{\;\;\;\;k}, \tag{8.51}$$

$$b_{i[j}b_{m]n} = R_{mjin},$$

$$\left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial\alpha^m} + \Gamma^k_{ij}b_{mk}\right]_{[jm]} = 0. \tag{8.52}$$

Формулу (8.52) можно перепнсать в виде

$$b_{i[j,m]} = 0. \tag{8.53}$$

Как уже отмечалось, тензор Римаиа R_{mjin} в двумерном пространстве имеет всего одну независимую компоненту, например R_{1212}. Поэтому уравнения (8.51) можно записать в виде

$$b_{12}{}^2 - b_{11}b_{22} = R_{1212}, \tag{8.54}$$

где

$$R_{1212} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial(\alpha^1)^2} + \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial(\alpha^2)^2} - 2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial\alpha^1\,\partial\alpha^2}\right) + \\ + g^{kq}\left(\Gamma_{11,k}\Gamma_{22,q} - \Gamma_{12,k}\Gamma_{12,q}\right). \tag{8.55}$$

Формулы (8.53) и (8.54) носят название формул Петерсона— Кодацци.

Упражнение 8.15. Показать, что из второго уравнения (8.49) следуют уравнения (8.53), (8.54).

Упражнение 8.16. Показать, что

$$K = -\frac{R_{1212}}{g}. \tag{8.56}$$

Упражнение 8.17. Доказать, что

$$b_{ij}b^{ij} = b_{ij}g^{ij} - 2\frac{\det|b_{ij}|}{g}. \tag{8.57}$$

Упражнение 8.18. Доказать, что линии, для которых в каждой точке геодезическая кривизна $k_g = 0$, являются геодезическими линиями.

Упражнение 8.19. Пусть определена тройка векторов

$$\vec{P}^i = T^{ij}\vec{r}_j + Q^i\vec{n}, \tag{8.58}$$

где T^{ij} — компоненты некоторого тензора, а Q^i — компоненты вектора. Доказать, что уравнение

$$\vec{P}^i{}_{,i} = 0 \tag{8.59}$$

эквивалентно системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} T^{ij}_{.i} - Q^i b^j_i &= 0, \\ Q^i_{,i} + T^{ij}b_{ij} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.60}$$

Упражнение 8.20. Пусть определена тройка векторов

$$\vec{M}^i = \vec{n} \times M^{ij}\vec{r}_j, \tag{8.61}$$

где M^{ij} — компоненты некоторого тензора. Доказать, что уравнение

$$\vec{M}^{i}_{,i} + \vec{r}_{i} \times \vec{P}^{i} = 0 \qquad (8.62)$$

(где векторы $\vec{P}^{i}$ определены в упр. 8.19) эквивалентио системе

$$\left.\begin{aligned} &M^{ij}_{,i} - Q^{j} = 0, \\ &\epsilon_{ij}\left(M^{ki} b^{j}_{k} + T^{ij}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8.63)$$

Упражнение 8.21. Доказать справедливость формулы

$$\oint\limits_{L} a^{i} \mu_{i}\, ds = \int\limits_{\Sigma} a^{i}_{,i}\, d\Sigma, \qquad (8.64)$$

где L — замкнутый контур, охватывающий поверхность Σ, a^{i} — контравариантные компоненты двумерного вектора $\vec{a}$, а

$$\mu_{i} = -\sqrt{g}\, \epsilon_{ij} \frac{d\alpha^{j}}{ds} \qquad (8.65)$$

компоненты вектора, нормального в данной точке к контуру L.