ПРИЛОЖЕНИЕ I

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРА ВТОРОГО РАНГА

Всякий симметричный тензор второго ранга $\underset{\sim}{b}$ может быть представлен в виде суммы n $(n \leqslant 6)$ взаимно ортогональных p-тензоров, принадлежащих инвариантным подпространствам относительно подгруппы G полной ортогональной группы I:

$$b_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{ij}^{(\alpha)}. \tag{1}$$

Для p-тензоров в прямоугольной декартовой системе координат должны выполняться условия

$$\frac{p_{ij}^{(\alpha)} p_{ij}^{(\beta)}}{I_\alpha I_\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \langle \alpha,\ \beta = 1, \ldots, n \rangle.$$

Инвариант p-тензора I_α называется линейным, если его можно представить в виде

$$p_{ij}^{(\varkappa)} = \frac{a_{ij}^{(\varkappa)}}{a_\varkappa} I_\varkappa, \quad \langle \varkappa = 1, \ldots, m \rangle; \ m \leqslant 3, \tag{2}$$

где $a_{ij}^{(\varkappa)}$ — компоненты симметричного тензора $\underset{\sim}{a}^{(\varkappa)}$, инвариантного относительно группы G, причем можно всегда потребовать выполнения условий:

$$\frac{a_{ij}^{(\varkappa)} a_{ij}^{(\rho)}}{a_\varkappa a_\rho} = \delta_{\varkappa\rho}, \quad \langle \varkappa,\ \rho = 1, \ldots, m \rangle,$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{m} a_{ij}^{(\varkappa)} = \delta_{ij}.$$

Из определения (2) следует, что линейный инвариант может быть определен сверткой

$$I_\varkappa = p_{ij}^{(\varkappa)} \frac{a_{ij}^{(\varkappa)}}{a_\varkappa}, \quad \langle \varkappa = 1, \ldots, m \rangle.$$

Рассмотрим три частных случая p-представления произвольного симметричного тензора $\underset{\sim}{b}$, когда тензоры

$$a_{ij}^{(1)}, \ a_{ij}^{(2)}, \ldots, \ a_{ij}^{(m)}$$

являются образующими группы G.

1°. Группа G совпадает со всей группой I (изотропия).

В этом случае $m=1$, $n=2$. Поэтому существует только один образующий тензор — единичный и

$$a_{ij}^{(1)}=\delta_{ij};\ a_1=\sqrt{3};\ I_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\langle \underset{\sim}{b}\rangle;\quad p_{ij}^{(1)}=\frac{1}{3}\langle \underset{\sim}{b}\rangle\,\delta_{ij}.$$

Второй p-тензор является девиатором тензора $\underset{\sim}{b}$:

$$p_{ij}^{(2)}=\bar{b}_{ij};\ I_2=b_{\text{и}}=(\bar{b}_{ij}\bar{b}_{ij})^{1/2}.$$

Таким образом, в случае изотропии p-разложение (1) есть не что иное, как представление тензора $\underset{\sim}{b}$ в виде суммы шарового тензора и девиатора:

$$b_{ij}=\frac{1}{3}\langle \underset{\sim}{b}\rangle\,\delta_{ij}+\bar{b}_{ij}.$$

2°. Группа G является группой T_3 (трансверсальная изотропия).

В этом случае $m=2$, $n=4$ и образующих тензоров будет два, например

$$a_{ij}^{(1)}=\delta_{i1}\delta_{j1}+\delta_{i2}\delta_{j2};\ a_1=\sqrt{2};\ I_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(b_{11}+b_{22}),$$

$$a_{ij}^{(2)}=\delta_{i3}\delta_{j3};\ a_2=1;\ I_2=b_{33}.$$

Первые два p-тензора, соответствующие линейным инвариантам, будут иметь компоненты:

$$p_{ij}^{(1)}=\frac{1}{2}(b_{11}+b_{12})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix};\quad p_{ij}^{(2)}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&b_{33}\end{pmatrix}.$$

Остальные два p-тензора:

$$p_{ij}^{(3)}=\begin{pmatrix}\frac{b_{11}-b_{22}}{2}&b_{12}&0\\ b_{21}&\frac{b_{22}-b_{11}}{2}&0\\0&0&0\end{pmatrix};\quad p_{ij}^{(4)}=\begin{pmatrix}0&0&b_{13}\\0&0&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&0\end{pmatrix}.$$

При этом

$$I_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(b_{11}-b_{22})^2+4b_{12}^2}\ ;\quad I_4=\sqrt{2\,(b_{13}^2+b_{23}^2)}\ .$$

Заметим, что если ось трансверсальной изотропии направлена не по оси Ox_3, а составляет с ней угол φ, то можно ввести вектор $\vec{c}(0,\ \sin\varphi,\ \cos\varphi)$, характеризующий эту ось. Тогда образующие тензоры примут вид

$$a_{ij}^{(1)} = \delta_{ij} - c_i c_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi \\ 0 & -\sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix},$$

$$a_{ij}^{(2)} = c_i c_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ 0 & \sin\varphi\cos\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Как изменятся в этом случае остальные формулы, показано на с. 151, 152.

3°. Группа G является группой O (ортотропия). В этом случае $m=3$, $n=4$ и образующих тензоров будет три, например

$$a_{ij}^{(1)} = \delta_{i1}\delta_{j1}; \quad a_{ij}^{(2)} = \delta_{i2}\delta_{j2}; \quad a_{ij}^{(3)} = \delta_{i3}\delta_{j3};$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1; \quad I_1 = b_{11}; \quad I_2 = b_{22}; \quad I_3 = b_{33}.$$

Поэтому p-тензоры, соответствующие линейным инвариантам, будут иметь компоненты:

$$p_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad p_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad p_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Остальные три p-тензора:

$$p_{ij}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & b_{32} & 0 \end{pmatrix}; \quad p_{ij}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad p_{ij}^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$I_4 = \sqrt{2}\,|b_{23}|; \; I_5 = \sqrt{2}\,|b_{13}|; \; I_6 = \sqrt{2}\,|b_{12}|.$$

Главные оси ортотропии могут быть направлены не по осям координат Ox_i, а по осям Ox_i', ориентация которых определяется с помощью углов Эйлера φ_1, φ_2, θ, часто используемых в теоретической механике:

$$x_i = g_{ij}\, x_j'$$

(компоненты матрицы g_{ij} выписаны на с. 46).

Обозначим через OL прямую пересечения плоскостей $Ox_1'x_2'$ и Ox_1x_2 (линия узлов). Тогда углы Эйлера определяются следующим образом.

Первый угол φ_1 (собственного вращения) — между OL и Ox_1, второй φ_2 (угол прецессии) — между Ox_1' и OL и третий θ (угол нутации) — между Ox_3' и Ox_3.

С их помощью можно определить три единичных вектора $c^{(\varkappa)}$ $(g_{\varkappa 1}, g_{\varkappa 2}, g_{\varkappa 3})$ и три образующих тензора

$$a_{ij}^{(\varkappa)} = c_i^{(\varkappa)} c_j^{(\varkappa)}, \ (\varkappa = 1, 2, 3).$$

Как изменяются остальные формулы этого пункта показано на с. 152, 153 (см. также упражнение 2.10 на с. 151).