

электрона  $q_0$ , силу, действующую на электрон, можно определить по формуле

$$\mathbf{F}_m = -q_0 [\mathbf{vB}],$$

где  $\mathbf{v}$  — средняя скорость движения электрона вдоль проводника;  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция.

Если обозначить напряженность поперечного электрического поля  $E_t$ , то на электрон будет действовать еще одна сила

$$\mathbf{F}_E = -q_0 \mathbf{E}_t.$$

При равновесии

$$\mathbf{F}_m = -\mathbf{F}_E.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}_t = -[\mathbf{vB}].$$

Так как в металлах концентрация электронов велика, средняя скорость движения их вдоль проводника будет небольшой, поэтому эффект Холла в металлах проявляется слабо. В полупроводниках (таких, в которых движутся частицы одного знака) эффект Холла оказывается значительно сильнее.

Эффект Холла используется в так называемых датчиках Холла — приборах, используемых в измерительных схемах, и в ряде других случаев [Л. 12].

### 3-9. МЕТОДЫ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Расчет магнитного поля чаще всего сводится к определению вектора напряженности  $\mathbf{H}$ . Величины токов и положения проводников, по которым эти токи протекают, должны быть заданы. Если рассматривается поле в неферромагнитной среде, можно считать, что

$$\mu_a = \mu \mu_0 \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

Если непосредственное определение напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  связано с большими математическими трудностями, удобно вводить векторный потенциал. Определив векторный потенциал, можно легко найти напряженность поля.

При расчете магнитных полей могут быть применены следующие методы:

метод наложения; применение закона полного тока в интегральной форме; применение первого уравнения

Максвелла; применение уравнений Пуассона и Лапласа для векторного потенциала; метод зеркальных изображений; метод конформных преобразований; графический метод расчета и ряд других методов [Л. 6]. Ниже на ряде конкретных примеров будут рассмотрены некоторые из перечисленных выше методов.

**Пример 3-1.** По прямому цилиндрическому проводу круглого сечения протекает ток  $I$ . Радиус провода  $a$ . Требуется определить напряженности магнитного поля внутри и вне провода, считая его уединенным и бесконечно длинным.

В силу симметрии линии вектора  $\mathbf{H}$  являются окружностями, плоскости которых перпендикулярны оси провода. Центры этих окружностей лежат на оси цилиндра. На одинаковых расстояниях от оси цилиндра численное значение вектора  $\mathbf{H}$  одно и то же

$$H = f(r).$$

Рассмотрим линию вектора  $\mathbf{H}$  внутри провода. Циркуляция  $H_{\text{вн}}$  по этой линии равна охваченному току

$$\oint_L H_{\text{вн}} dl = I \frac{r^2}{a^2}.$$

Так как  $H_{\text{вн}}$  вдоль контура интегрирования имеет одинаковое численное значение и направлена по касательной к линии  $L$ , то

$$\oint_L H_{\text{вн}} dl = H_{\text{вн}} \cdot 2\pi r.$$

Приравняв циркуляцию и полный ток, получим:

$$H_{\text{вн}} = \frac{Ir}{2\pi a^2}.$$

На поверхности проводника напряженность поля имеет наибольшее значение.

Если контур интегрирования  $L$  провести вдоль линии вектора  $\mathbf{H}$  вне провода, циркуляция  $H_{\text{вн}}$  равна току в проводе:

$$H_{\text{вн}} \cdot 2\pi r = I.$$

Следовательно,

$$H_{\text{вн}} = \frac{I}{2\pi r}.$$

На границе  $r = a$

$$H_{\text{вн}} = H_{\text{вн}} = \frac{I}{2\pi a}.$$

На рис. 3-9 показана кривая  $H = f(r)$ .

Определим векторный потенциал  $\mathbf{A}$ . Направление векторного потенциала

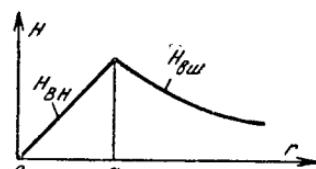


Рис. 3-9. Напряженность магнитного поля цилиндрического проводника с током.

совпадает с направлением вектора плотности тока. Следовательно, для прямого проводника с током вектор  $\mathbf{A}$  направлен параллельно оси провода. Если ось  $z$  цилиндрической системы координат совместить с осью провода, то векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{H}$  будут иметь по одной проекции  $A = A_z$ ;  $H = H_\psi$ , которые зависят от координаты  $r$ . Так как по определению векторного потенциала

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_a \mathbf{H},$$

то в рассматриваемом случае

$$-\frac{dA_z}{dr} = \mu_a H_\psi.$$

Внутри провода

$$A_{\text{вн}} = - \int \mu_a H_{\text{вн}} dr + \text{const} = - \frac{\mu_a I r^2}{4\pi a^2} + \text{const}.$$

Если принять  $A_{\text{вн}} = 0$  при  $r = a$ , постоянная интегрирования равна:

$$\text{const} = \frac{\mu_a I}{4\pi}.$$

Поэтому

$$A_{\text{вн}} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right).$$

Вне провода

$$A_{\text{вн}} = - \frac{\mu_a I}{2\pi} \ln r + \text{const}.$$

Так как векторный потенциал непрерывен, то при  $r = a$   $A_{\text{вн}} = A_{\text{вн}}$ . Постоянная интегрирования в выражении  $A_{\text{вн}}$  равна:

$$\text{const} = \frac{\mu_a I}{2\pi} \ln a.$$

Следовательно,

$$A_{\text{вн}} = \frac{\mu_a I}{2\pi} \ln \frac{a}{r}.$$

Линии вектора  $\mathbf{H}$  определяются равенством  $r = \text{const}$ . Вдоль них векторный потенциал постоянен. Это положение справедливо для любого плоскопараллельного магнитного поля.

Магнитный поток внутри провода на участке длиной  $l$

$$\Phi_{\text{вн}} = \int_S \mu_a H_{\text{вн}} dS.$$

При выбранных на рис. 3-10 направлениях тока и обхода площадки скалярное произведение

$$H_{\text{вн}} dS = H_{\text{вн}} dS = \frac{I r}{2\pi a^2} l dr.$$

Следовательно,

$$\Phi_{\text{вн}} = \frac{\mu_a I l}{2\pi a^2} \int_{r=0}^a r dr = \frac{\mu_a I l}{4\pi}.$$

Чтобы подсчитать потокосцепление  $\Psi_{\text{вн}}$ , найдем часть тока  $I$ , с которым сцеплен поток  $d\Phi_{\text{вн}}$ , пронизывающий площадку  $dS = l dr$ . Эта часть тока будет относиться к току  $I$ , как  $\pi r^2$  относится к  $\pi a^2$ .

Искомое потокосцепление определяется из выражения

$$\Psi_{\text{вн}} = \int_S d\Psi_{\text{вн}} = \int_S \frac{r^2}{a^2} d\Phi_{\text{вн}}.$$

Так как  $d\Phi_{\text{вн}} = \mu_a H_{\text{вн}} dS = \frac{\mu_a I r}{2\pi a^2} l dr$ , то  $\Psi_{\text{вн}} = \mu_a I l / 8\pi$ . Следовательно, потокосцепление в рассматриваемом случае в 2 раза меньше потока.

Зная потокосцепление, можно найти внутреннюю индуктивность одиночного провода

$$L_{\text{вн}} = \frac{\Psi_{\text{вн}}}{I} = \frac{\mu_a l}{8\pi}.$$

Как видно из формулы,  $L_{\text{вн}}$  не зависит от радиуса провода. Внешний поток и потокосцепление будут равны. Внешняя индуктивность одиночного провода будет равна бесконечности, так как обратный провод бесконечно удален от рассматриваемого.

Энергию магнитного поля в объеме  $V = \pi a^2 l$  можно подсчитать по двум формулам:

$$W_{\text{м. вн}} = \frac{\Psi_{\text{вн}} l}{2}$$

или

$$W_{\text{м. вн}} = \int_{V_{\text{вн}}} \frac{\mu_a H_{\text{вн}}^2}{2} dV.$$

В обоих случаях она равна:

$$W_{\text{м. вн}} = \frac{\mu_a I^2 l}{16\pi}.$$

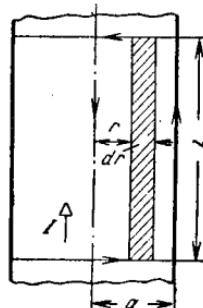


Рис. 3-10. Определение магнитного потока внутри проводника с током.

**Пример 3-2.** Определить индуктивность двухпроводной линии передачи электрической энергии. Провода параллельны, и расстояние между их осями  $d$ . Радиусы проводов одинаковы и равны  $a$  (рис. 3-11).

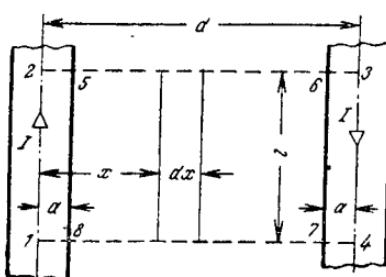


Рис. 3-11. Определение магнитного поля двухпроводной линии.

индукцию одиночного провода. При этом допускается некоторая неточность, так как благодаря эффекту близости в двухпроводной линии ток не будет равномерно распределен по сечению, как это имеет место в одиночном проводе.

Если выбрать направление обхода контура по линии 56785, а токи в проводах направить так, как показано на рис. 3-7, векторы  $\mathbf{B}_{\text{вн}}$  и  $d\mathbf{S}$  совпадут по направлению и внешний магнитный поток

$$\Phi_{\text{вн}} = 2 \int_{x=a}^{d-a} \frac{\mu_0 l}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 ll}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}.$$

Так как  $\Phi_{\text{вн}}$  сцеплен с током  $I$  1 раз, то потокосцепление  $\Psi_{\text{вн}}$  будет равно потоку  $\Phi_{\text{вн}}$ :

$$\Psi_{\text{вн}} = \frac{\mu_0 ll}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}.$$

Внутренний магнитный поток и потокосцепление, если не учитывать наличие второго провода, можно определить из выражений

$$\Phi'_{\text{вн}} = \frac{\mu_0 ll}{4\pi}; \quad \Psi'_{\text{вн}} = \frac{\mu_a ll}{8\pi}.$$

Так как линия двухпроводная, то

$$\Phi_{\text{вн}} = \Phi_{25812} + \Phi_{63476} = 2\Phi'_{\text{вн}} = \frac{\mu_a ll}{2\pi}.$$

Соответственно

$$\Psi_{\text{вн}} = \frac{\mu_a ll}{4\pi}.$$

Зная потокосцепление, можно определить индуктивность двухпроводной линии

$$L = \frac{\Psi_{\text{вн}} + \Psi_{\text{вн}}}{I} = \frac{\mu_0 l}{4\pi} \left( 4 \ln \frac{d-a}{a} + \mu \right).$$

Магнитный поток, сцепленный с линией на участке длиной  $l$ , можно записать в виде суммы трех потоков  $\Phi = \Phi_{56785} + \Phi_{12581} + \Phi_{63476}$ . Первое слагаемое представляет собой внешний магнитный поток

$$\Phi_{\text{вн}} = \int_S \mathbf{B}_{\text{вн}} d\mathbf{S} = \int_S \mu_0 \mathbf{H}_{\text{вн}} d\mathbf{S}.$$

Пользуясь принципом наложения, можно найти магнитную индукцию  $\mathbf{B}_{\text{вн}}$  как сумму двух векторов, каждый из которых представляет собой магнитную

Для проводов из неферромагнитного материала магнитная проницаемость  $\mu$  может быть принята равной единице.

Обычно в линии расстояние  $d \gg a$ . Поэтому и величина  $4 \ln \frac{d-a}{a} \gg 1$ . Положив  $d - a \approx d$  и отбросив второе слагаемое в выражении индуктивности, находим:

$$L \approx \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{a}.$$

После замены натурального логарифма десятичным, учитывая, что  $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} = 12,56 \cdot 10^{-7}$  Гн/м, получим выражение индуктивности на единицу длины линии:

$$L_0 = \frac{L}{l} = 0,921 \cdot 10^{-6} \lg \frac{d}{a}, \text{ Гн/м.}$$

Формула эта приведена в ч. I, § 11-1.

**Пример 3-3.** Исследовать магнитное поле трубчатого проводника с постоянным током  $I$ . Размеры трубы показаны на рис. 3-12. Воспользуемся первым уравнением Максвелла. Область, занятую полем, можно разбить на три части и для каждой из них записать первое уравнение Максвелла:

$$\text{при } 0 \leq r \leq b \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = 0;$$

$$\text{при } b \leq r \leq c \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = \bar{\delta};$$

$$\text{при } c \leq r \leq \infty \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_3 = 0.$$

Ось  $z$  цилиндрической системы координат совместим с осью трубы и будем считать, что ток  $I$  направлен параллельно оси  $z$ . В силу симметрии вектор  $\mathbf{H}$  имеет только одну проекцию  $H_\phi$ , которая меняется в функции от координаты  $r$ . Вектор плотности тока будет направлен параллельно оси  $z$

$$\bar{\delta} = k \delta_z = k \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)}.$$

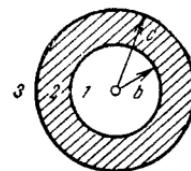


Рис. 3-12. Цилиндрическая труба с током.

Если развернуть выражение  $\operatorname{rot} \mathbf{H}$  в цилиндрической системе координат (см. приложение 3) и учесть, что  $H = H_\phi$ ,  $\delta = \delta_z$ , то получим:

$$\frac{1}{r} \frac{d(H_1 r)}{dr} = 0; \quad \frac{1}{r} \frac{d(H_2 r)}{dr} = \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)}; \quad \frac{1}{r} \frac{d(H_3 r)}{dr} = 0.$$

После интегрирования определим напряженность магнитного поля во всех трех областях:

$$H_1 = \frac{K_1}{r}; \quad H_2 = \frac{Ir}{2\pi(c^2 - b^2)} + \frac{K_2}{r};$$

$$H_3 = \frac{K_3}{r}.$$

Для определения постоянных интегрирования  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  надо учесть, что  $H$  — величина конечная. Кроме того, так как на границе нет поверхностных токов,  $H_\tau$  — величина непрерывная.

Постоянная  $K_1 = 0$ , так как иначе  $H_1$  при  $r = 0$  обратилась бы в бесконечность. Следовательно, в области  $0 \leq r \leq b$  поля нет, напряженность всюду равна нулю  $H_1 = 0$ .

При  $r = b$  должно иметь место равенство  $H_1 = H_2$  или

$$0 = \frac{Ib}{2\pi(c^2 - b^2)} + \frac{K_2}{b},$$

откуда

$$K_2 = -\frac{Ib^2}{2\pi(c^2 - b^2)}.$$

Напряженность магнитного поля в области  $b \leq r \leq c$

$$H_2 = \frac{I(r^2 - b^2)}{2\pi(c^2 - b^2)r}.$$

При  $r = c$  согласно граничному условию  $H_2 = H_3$

$$\frac{I}{2\pi c} = \frac{K_3}{c}$$

или

$$K_3 = \frac{I}{2\pi}.$$

Тогда в области  $c \leq r \leq \infty$

$$H_3 = \frac{I}{2\pi r}.$$

На рис. 3-13 показана кривая  $H = f(r)$ . Если бы по сплошному цилиндрическому проводнику радиуса  $c$  протекал ток такой же величины  $I$ , то поле в области  $r > c$  было бы таким же, как и в случае трубчатого проводника.

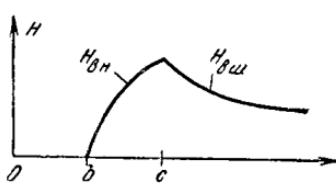


Рис. 3-13. Напряженность магнитного поля трубы с током.

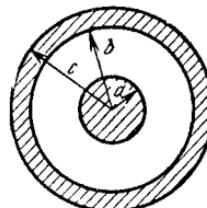


Рис. 3-14. Коаксиальный кабель.

**Пример 3-4.** Исследовать магнитное поле коаксиального кабеля, по которому протекает постоянный ток  $I$ . Размеры проводников кабеля указаны на рис. 3-14. Определим векторный потенциал  $A$  с помощью уравнений Пуассона и Лапласа. Ось  $z$  цилиндрической системы координат совместим с осью кабеля. Пусть направление тока в цилиндрическом проводнике кабеля совпадет с направлением оси  $z$ . Так как ток постоянный и кабель симметричный, ток распределяется по сечению

проводников равномерно. Плотность тока в центральном проводнике

$$\delta_1 = k\delta_{1z} = k \frac{l}{\pi a^3}.$$

В наружном трубчатом проводнике

$$\delta_2 = -k\delta_{2z} = -k \frac{l}{\pi(c^2 - b^2)}.$$

Направления векторов  $\delta_1$  и  $\delta_2$  прямо противоположны. Направление векторного потенциала магнитного поля совпадает с направлением вектора плотности тока, следовательно,  $\mathbf{A}$  имеет одну проекцию  $A_z$ .

Уравнение Пуассона для области  $0 \leq r \leq a$  запишется следующим образом:

$$|\nabla^2 \mathbf{A}_1|_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_{1z}}{\partial r} \right) = -\mu_a \delta_{1z},$$

причем  $\delta_1$  и  $A_1$  зависят только от одной переменной  $r$ .

Интегрируя, получаем:

$$A_1 = A_{1z} = -\frac{\mu_a \delta_1 r^2}{4} + K_1 \ln r + K_2.$$

Напряженность поля

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

В развернутом виде, учитывая, что  $H = H_\psi$ ,  $A = A_z$ , получаем:

$$H_\psi = -\frac{1}{\mu_a} \frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

Следовательно,

$$H_1 = \frac{\delta_1 r}{2} - \frac{K_1}{\mu_a r}.$$

Так как напряженность поля — величина конечная, то постоянная  $K_1$  должна равняться нулю. Кроме того, предположим, что на поверхности проводника при  $r = a$  векторный потенциал равен нулю, тогда

$$K_2 = \frac{\mu \mu_0 I}{4\pi}.$$

В области  $0 \leq r \leq a$

$$H_1 = H_{1\psi} = \frac{Ir}{2\pi a^2};$$

$$A = A_{1z} = \frac{\mu \mu_0 I (a^2 - r^2)}{4\pi a^2}.$$

На оси векторный потенциал

$$A_0 = \frac{\mu \mu_0 I}{4\pi}.$$

В области  $a \leq r \leq b$  поле описывается уравнением Лапласа

$$\nabla^2 \mathbf{A}_2 = 0.$$

После интегрирования находим:

$$A_2 = K_3 \ln r + K_4;$$

$$H_2 = -\frac{K_3}{\mu_0 r}.$$

Для определения постоянных интегрирования используем граничные условия.

При  $r = a$   $H_{1r} = H_{2r}$ ;  $A_1 = A_2$ .

Касательная составляющая  $H$  на границе непрерывна, так как поверхностных токов на границе нет.

При  $r = a$

$$\frac{I}{2\pi a} = -\frac{K_3}{\mu_0 a}$$

и

$$K_3 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}.$$

Далее

$$K_3 \ln a + K_4 = 0,$$

или

$$K_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a.$$

В пространстве между проводниками кабеля

$$H_2 = H_{2\psi} = \frac{\delta_1 a^2}{2r} = \frac{I}{2\pi r};$$

$$A_2 = A_{2z} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a}.$$

Магнитное поле в центральном проводнике и между центральным и наружным трубчатым проводником ничем не отличается от поля цилиндрического проводника (пример 3-1). В области  $b \leq r \leq c$ , т. е. в толще трубы, после интегрирования уравнения Пуассона получим:

$$H_3 = \frac{\delta_2 r}{2} - \frac{K_5}{\mu_0 \mu r};$$

$$A_3 = -\frac{\mu_0 \mu \delta_2 r^2}{4} + K_5 \ln r + K_6.$$

При  $r = b$

$$H_2 = H_3 \text{ и } A_2 = A_3,$$

что дает:

$$K_5 = -\frac{\mu_0 \mu I c^2}{2\pi (c^2 - b^2)};$$

$$K_6 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{b} + \frac{\mu_0 \mu I c^2}{2\pi (c^2 - b^2)} \ln b - \frac{\mu_0 \mu I b^2}{4\pi (c^2 - b^2)}.$$

Следовательно, в области  $b \leq r \leq c$

$$H_3 = \frac{I(c^2 - r^2)}{2\pi r(c^2 - b^2)};$$

$$A_3 = \frac{I}{2\pi} \left\{ \frac{\mu_0 \mu c^2}{c^2 - b^2} \ln \frac{b}{r} + \mu_0 \ln \frac{a}{b} + \frac{\mu_0 \mu (r^2 - b^2)}{2(c^2 - b^2)} \right\}.$$

Вне кабеля

$$H_{\text{вн}} = 0;$$

$$A_{\text{вн}} = \frac{I}{2\pi} \left\{ \frac{\mu_0 \mu c^2}{c^2 - b^2} \ln \frac{b}{c} + \mu_0 \ln \frac{a}{b} + \frac{\mu_0 \mu}{2} \right\}.$$

На рис. 3-15 изображены кривые  $H$  и  $A$  в функции от  $r$ .

**Пример 3-5.** Определить индуктивность коаксиального кабеля, размеры которого изображены на рис. 3-14. Длина кабеля  $l$ . Магнитное потокосцепление складывается из трех потокосцеплений

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3.$$

Потокосцепление внутри проводника (см. пример 3-1)

$$\Psi_1 = \frac{\mu_0 \mu l}{8\pi}.$$

Магнитный поток и потокосцепление в области между двумя проводниками кабеля одинаковы и равны (пример 3-1):

$$\Psi_2 = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{a_1}{a}.$$

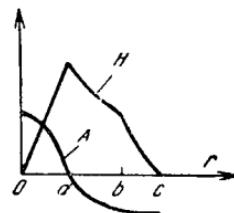


Рис. 3-15. Напряженность магнитного поля и векторный потенциал коаксиального кабеля.

Потокосцепление  $\Psi_3$  определяется из выражения

$$\begin{aligned} \Psi_3 &= \int_{a_1}^{a_2} d\Psi_3 = \int_{a_1}^{a_2} d\Phi_3 \frac{a_2^2 - r^2}{a_2^2 - a_1^2} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\mu_0 \mu l (a_2^2 - r^2)^2}{2\pi r (a_2^2 - a_1^2)^2} dr = \\ &= \frac{\mu_0 \mu l l}{2\pi} \left\{ \frac{a^4}{(a_2^2 - a_1^2)^2} \ln \frac{a^2}{a_1} - \frac{1}{4} \frac{3a_2^2 - a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \right\}. \end{aligned}$$

Индуктивность кабеля

$$L = \frac{\Psi}{l} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left\{ \ln \frac{a_1}{a} + \frac{\mu a_1^4}{(a_2^2 - a_1^2)^2} \ln \frac{a_2}{a_1} - \frac{\mu a_2^2}{2(a_2^2 - a_1^2)} \right\}.$$

Если проводники не ферромагнитные, магнитная проницаемость их равна единице.

Если не учитывать внутреннее потокосцепление, выражение для  $L$  упростится:

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{a_1}{a}.$$

Подставив значение магнитной постоянной и записав вместо натурального логарифма десятичный, получим индуктивность коаксиаль-

нога кабеля на единицу длины:

$$L_0 \approx 0,46 \cdot 10^{-6} \lg \frac{b}{a}, \text{ гн/м.}$$

Здесь  $b = a_1$ .

Формула эта приведена в ч. I, § 11-1.

**Пример 3-6.** Исследовать магнитное поле двухпроводной линии, считая провода линейными. Постоянный ток, протекающий по проводам, равен  $I$ . Расстояние между проводами равно  $d$ . Векторный потенциал линейного провода

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \oint_L \frac{d\mathbf{l}}{R}.$$

Начало декартовой системы координат поместим так, как показано на рис. 3-16. Провода параллельны оси  $x$  и находятся от нее на одинаковом

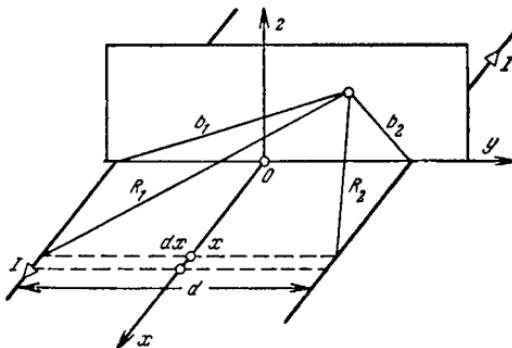


Рис. 3-16. Два параллельных линейных тока.

ковом расстоянии  $d/2$ . Векторный потенциал будет иметь только одну составляющую  $A_x$ . Пользуясь методом наложения и считая  $\mu_a = \mu_0$ , находим:

$$\begin{aligned} A = A_x &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{b_1^2 + x^2}} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{b_2^2 + x^2}} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{b_2^2 + x^2}} \right) dx = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left| \ln \frac{x + \sqrt{b_1^2 + x^2}}{x + \sqrt{b_2^2 + x^2}} \right|_0^{\infty}. \end{aligned}$$

Отношение

$$\frac{x + \sqrt{b_1^2 + x^2}}{x + \sqrt{b_2^2 + x^2}},$$

когда  $x$  стремится к бесконечности, стремится к единице. Следовательно, логарифм этого отношения будет равен нулю при  $x = \infty$ .

Тогда

$$A = A_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b_2}{b_1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{\left(y + \frac{d}{2}\right)^2 + z^2}}{\sqrt{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2 + z^2}}.$$

Зная векторный потенциал, можно определить напряженность магнитного поля

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

В декартовой системе координат, так как  $A_y = A_z = 0$ ,

$$H_x = 0; \quad H_y = \frac{1}{\mu_a} \frac{\partial A_x}{\partial z}; \quad H_z = -\frac{1}{\mu_a} \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Подставив значение  $A_x$ , получим:

$$\begin{aligned} H_x &= 0; \\ H_y &= \frac{Iz}{2\pi} \left( \frac{1}{b_2^2} - \frac{1}{b_1^2} \right); \\ H_z &= -\frac{I}{2\pi} \left( \frac{y + \frac{d}{2}}{b_2^2} - \frac{y - \frac{d}{2}}{b_1^2} \right). \end{aligned}$$

**Пример 3-7.** Прямой линейный проводник с постоянным током  $I$  расположен параллельно плоскости раздела двух сред на расстоянии  $d$  от нее (рис. 3-17). Среда  $I$ , в которой находится проводник с током, имеет проницаемость  $\mu_1$ . Проницаемость второй  $II$  среды  $\mu_2$ . Определить напряженность магнитного поля в обеих средах.

Так как на границе двух сред нет поверхностных токов, то на плоскости раздела  $xOy$  должны иметь место соотношения

$$H_{1n} = H_{II_n}; \quad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{II_n}.$$

Рассмотрим вместо заданной задачи две другие, которые решаются легче.

В первой задаче (рис. 3-18) рассматривается поле двух параллельных линейных проводов с токами  $I$  и  $I_1$ , направленными в противоположные стороны. Среда, в которой находятся эти провода, однородная с проницаемостью  $\mu_1$ . Расстояние между проводами  $2d$ . Сравнивая рис. 3-17 и 3-18, убеждаемся, что в области  $I$  (над плоскостью  $xOy$ ) условия для обеих задач одинаковы. Если подобрать фиктивный ток  $I_1$  таким образом, чтобы были выполнены граничные условия основной задачи, можно вектор поля в области  $I$  легко рассчитать. Сравнивая рис. 3-19 и 3-17, убеждаемся, что в области  $II$  (под плоскостью  $xOy$ )

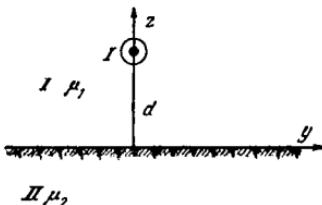


Рис. 3-17. Линейный ток вблизи плоской границы.

условия обеих задач одинаковы. Следовательно, при выполнении граничных условий вектор поля в области II можно легко определить.

Рассмотрим точку  $m$  на граничной плоскости (рис. 3-18).

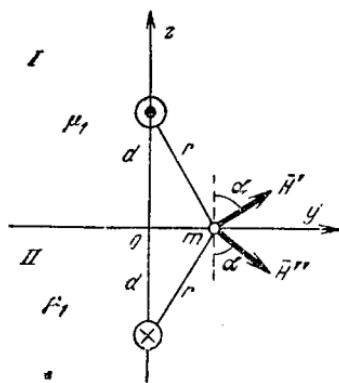


Рис. 3-18. Два линейных тока в однородной среде.

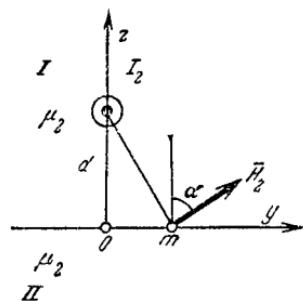


Рис. 3-19. Линейный ток в однородной среде.

Напряженность магнитного поля и ее составляющие в этой точке определяются методом наложения:

$$H_{\tau \text{рез}} = \frac{I}{2\pi r} \sin \alpha + \frac{I_1}{2\pi r} \sin \alpha;$$

$$H_{n \text{рез}} = \frac{I}{2\pi r} \cos \alpha - \frac{I_1}{2\pi r} \cos \alpha.$$

В той же точке рис. 3-19 напряженность магнитного поля и ее составляющие от тока  $I_2$  равны:

$$H_{\tau 2} = \frac{I_2}{2\pi r} \sin \alpha; \quad H_{n 2} = \frac{I_2}{2\pi r} \cos \alpha.$$

Согласно граничным условиям

$$H_{\tau 1} = H_{\tau \text{рез}} = H_{\tau 2};$$

$$\mu_1 H_{n 1} = \mu_1 H_{n \text{рез}} = \mu_2 H_{n 2}$$

или

$$\frac{\sin \alpha}{2\pi r} (I + I_1) = \frac{\sin \alpha}{2\pi r} I_2;$$

$$\frac{\mu_1 \cos \alpha}{2\pi r} (I - I_1) = \frac{\mu_2 \cos \alpha}{2\pi r} I_2.$$

Следовательно,

$$I + I_1 = I_2;$$

$$I - I_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1} I_2.$$

Решив эти уравнения, получим фиктивные токи:

$$I_1 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} I_i$$

$$I_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I_i$$

Зная фиктивные токи, находим векторы магнитного поля в области I:

$$\mathbf{H}_I = \frac{I}{2\pi r'} \mathbf{l}_{r'} + \frac{I_1}{2\pi r''} \mathbf{l}_{r''};$$

$$\mathbf{B}_I = \mu_1 \mu_0 \mathbf{H}_I,$$

где  $r'$  — расстояние от выбранной точки до первого провода;  $r''$  — расстояние от той же точки до второго провода.

Векторы магнитного поля в области II

$$\mathbf{H}_{II} = \frac{I_2}{2\pi r_2} \mathbf{l}_{r_2};$$

$$\mathbf{B}_{II} = \mu_2 \mu_0 \mathbf{H}_{II},$$

где  $r_2$  — расстояние от выбранной точки до провода с током  $I_2$ .

### 3-10. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

**3-1.** По прямому цилиндрическому стальному проводу круглого сечения радиусом  $a = 3 \text{ мм}$  протекает постоянный ток  $I = 0,5 \text{ A}$ . Магнитная проницаемость материала провода  $\mu = 200$ . Определить напряженность и индукцию магнитного поля внутри и вне провода.

Ответ:

$$H_{\text{вн}} = \frac{792}{r} 10^{-4}, \text{ а/м};$$

$$\mathbf{B} = 200 \mu_0 \mathbf{H};$$

$$H_{\text{вн}} = 88r \cdot 10^2, \text{ а/м}.$$

**3-2.** Определить векторный потенциал  $A$  однородного магнитного поля в цилиндрических координатах, если магнитная индукция направлена параллельно оси  $z$  и равна  $B_0 = \text{const}$ .

Ответ:

$$A = A_\psi = \frac{B_0 r}{2}.$$

**3-3.** Определить векторный потенциал в сферической системе координат. Данные те же, что в задаче 3-2. Координата  $\theta$  отсчитывается от оси  $z$ .

Ответ:

$$A = A_\psi = \frac{B_0 R}{2} \sin \theta.$$

**3-4.** Определить индуктивность тороида круглого сечения, считая, что магнитный поток распределен в нем равномерно. Магнитная прони-