несомненно, что физически, с точки зрения приближения нас к истинной картине движения, они окажутся неравноценными. Например, можно связать систему координат с палкой и получить хотя и сложное, но совершенно точное описание падения камня. Однако в этой системе ориентировки весь звездный мир будет представляться кувыркающимся вокруг палки, тогда как нет сомнения, что в действительности кувыркается палка. Мы несравненно ближе подходим к истинной картине движения, когда в данном случае принимаем в качестве системы ориентировки Землю.

§ 3. Элементарное перемещение. Векторы скорости и ускорения

Чтобы установить уточненное понимание скорости движения, проследим мысленно, как изменяются радиус-вектор и вектор перемещения при движении материальной точки по криволинейной траектории. На рис. 5 положение материальной точки в исходный момент времени t_0 обозначено C_0, а положения в моменты t и t' — C и C'. Геометрически складывая радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ для момента времени t с вектором перемещения $\boldsymbol{s}$ за промежуток времени $(t'—t)$, получаем радиус-вектор $\boldsymbol{r}'$ для момента времени t'. Следовательно, вектор перемещения за любой промежуток времени равен геометрическому приращению радиуса-вектора: $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$. Следует обратить внимание на то, что, сопоставляя положения материальной точки с ее исходным положением C_0, мы можем в свою очередь рассматривать вектор $\boldsymbol{s}$ как геометрическое приращение перемещения материальной точки из ее исходного положения $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}' - \boldsymbol{s}_0$ Поэтому, воспользовавшись общепринятой заменой слова «приращение» символом Δ («дельта»), можно написать

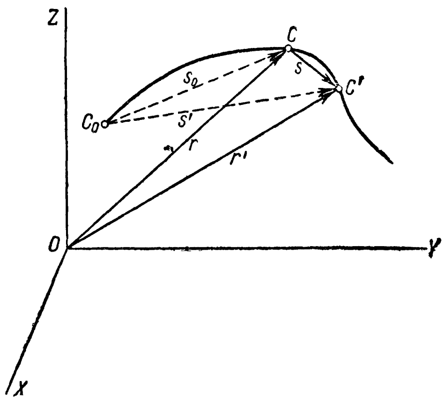

Рис. 5. Геометрические приращения радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ и вектора перемещения $\boldsymbol{s}$ совпадают.

$$\Delta \boldsymbol{s} = \Delta \boldsymbol{r} \tag{3}$$

Если мы представим себе, что точки C и C', показанные на рис. 5, расположены бесконечно близко одна от другой, то получим элементарно малое, или просто *элементарное, перемещение*. Символ Δ может указывать большое или малое изменение величины. В случае «крайне малых», точнее — *бесконечно малых* [1]) изменений применяют символ d, причем величина ds, именуемая дифференциалом s, практически вполне точно выражает «крайне малое» приращение s.

Очевидно, что численное значение элементарного перемещения равно бесконечно малой длине пути: $ds=dl$, тогда как вектор $d\mathbf{s}=d\mathbf{r}$.

Когда точка при своем движении испытывает перемещение $d\mathbf{s}$, координаты, определяющие положение точки, изменяются на величины dx, dy, dz. Численное значение вектора $d\mathbf{s}$ выражается через его компоненты dx, dy, dz по формуле, аналогичной (1), т. е.

$$dl=ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}. \qquad (4)$$

Это уравнение определяет элемент длины пути dl. Что касается направления элементарного перемещения, то в пределе (когда dt стремится к нулю) оно совпадает, как уже говорилось в § 2, с направлением касательной к траектории в точке C.

Представление об элементарном перемещении используется для уточнения понятия скорости. В обыденной жизни под скоростью чаще всего понимают величину, характеризующую только «быстроту» движения, а не его направление. В механике скорость определяют как вектор, указывающий и «быстроту», и направление движения.

В технических приложениях физики часто рассматривают *среднюю скорость* неравномерного движения

$$v_{\text{средн}}=\frac{l'-l}{t'-t},$$

где $l'-l$ — длина пути, пройденного за время $t'-t$.

При значительной неравномерности движения средняя скорость может оказаться весьма различной для разных по величине промежутков времени. Предел, к которому стремится средняя скорость

---

[1]) *Бесконечно малой величиной* называют всякую переменную величину, имеющую предел, равный нулю. Точно это означает следующее: рассматриваемая переменная величина изменяется так, что если взять заранее сколь угодно малое положительное число ε, в процессе изменения x наступит такая стадия, начиная с которой абсолютная величина переменной x будет оставаться меньше, чем ε. Следует отчетливо понять, что термин «бесконечно малая» относится только к переменным.

Понятие *дифференциала* основывается на понятии *производной*. Пусть имеем функцию $y=f(x)$. Возьмем какое-нибудь значение независимой переменной $x=x_0$. Разность $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x)$ называют приращением функции в точке x_0, соответствующим приращению Δx независимой переменной x. Если при стремлении к нулю приращения Δx отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к пределу, то предел этот называют производной от функции $y=f(x)$ в точке x_0 и обычно обозначают через $f'(x_0)$. Выражение $f'(x)\Delta x$ называется дифференциалом функции $y=f(x)$ и обозначается через dy. Из определения дифференциала вытекает, что $dx=\Delta x$ и что $f'(x)=\frac{dy}{dx}$.

при бесконечном убывании промежутка времени, представляет собой величину *истинной скорости* в момент времени t[1]):

$$v = \lim_{t' \to t} \left(\frac{l' - l}{t' - t} \right).$$

В математическом анализе такой предел называют *производной первого порядка* от функции $l=f(t)$; производную обозначают либо штрихом $f'(t)$, либо отношением дифференциалов $\frac{dl}{dt}$. Таким образом, в общем случае при неравномерном движении по криволинейной траектории под истинной скоростью в каждый данный момент времени понимают вектор, численное значение которого равно отношению элемента длины пути dl к элементарно малому промежутку времени dt, или, что то же, производной от пути по времени:

$$v = \frac{dl}{dt},$$

и направление которого совпадает с направлением касательной к траектории в той точке, где в данный момент находится движущаяся материальная точка. Иначе говоря, под вектором скорости понимают отношение вектора элементарного перемещения $\boldsymbol{ds}$ к элементарно малому промежутку времени (рис. 6):

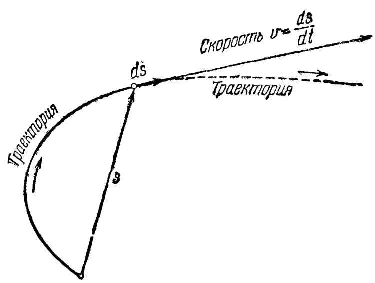

Рис. 6 Вектор скорости при криволинейном движении.

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{ds}}{dt}. \tag{5}$$

Под элементарно малым промежутком времени dt можно подразумевать $\frac{1}{n}$ долю секунды, где n — «крайне большое число»; умножив на это число числитель и знаменатель приведенной выше формулы (отчего, понятно, отношение не изменится), мы будем иметь в знаменателе 1 сек., а в числителе — n-кратное перемещение ds, т. е. длину того пути, который тело прошло бы в 1 сек., если, начиная с интересующего нас момента времени, оно двигалось бы равномерно.

Что́ означает физически переход от средней скорости движения к ее пределу при $\Delta t \to 0$, т. е. к истинной скорости движения? Этот переход означает, что для крайне малых промежутков времени любое движение можно рассматривать как приблизительно равномерное.

[1]) Обозначение lim от латинского limit — предел.

В самом деле, чем ближе $t'-t$ к нулю, тем меньше отличается от своего предела выражение средней скорости $\frac{l'-l}{t'-t}$ и тем с бо́льшим правом эту среднюю скорость для весьма малого промежутка времени мы можем принять за выражение истинной скорости.

Когда материальная точка испытывает элементарное перемещение ds, координаты точки изменяются на dx, dy, dz; эти величины являются проекциями элементарного перемещения ds на оси координат; очевидно, что отношение $\frac{dx}{dt}$ представляет собой скорость перемещения в направлении оси OX. *Проекция скорости на какую-либо ось (компонент скорости) представляет собой скорость перемещения в направлении данной оси.* Таким образом,

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{6}$$

Итак, *компоненты скорости являются производными первого порядка от координат по времени.*

Численное значение вектора скорости, как и всякого вектора, может быть выражено через его компоненты формулой, аналогичной формуле (1):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{7}$$

За единицу скорости принимают 1 *см/сек*, или 1 *м/сек*, или же 1 *км/сек*, иногда 1 *км/час*.

Движение с неизменной скоростью осуществляется на практике довольно редко. В большинстве же случаев при движении скорость изменяется как по величине, так и по направлению. Это изменение скорости движения характеризуется *ускорением*. Ускорение движения определяет как быстроту нарастания скорости, так и изменение направления скорости. Поэтому в физике под ускорением движения понимают особый вектор, численное значение которого равно величине предела, к которому стремится среднее ускорение при бесконечном убывании промежутка времени:

$$j = \lim_{t' \to t} \left(\frac{v' - v}{t' - t}\right),$$

т. е. оно равно производной от функции $v = f(t)$; $j = \frac{dv}{dt}$. Направление вектора ускорения, по самому определению этого вектора, считают совпадающим с направлением бесконечно малого геометрического приращения скорости $\mathbf{v}$. Иначе говоря, под вектором ускорения понимают отношение элементарного геометрического приращения скорости $d\mathbf{v}$ к бесконечно малому промежутку времени dt, в течение которого скорость испытывает указанное приращение:

$$\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Проекция ускорения на какую-либо ось имеет смысл *ускорения в направлении данной оси*. Таким образом,

$$j_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad j_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad j_z = \frac{dv_z}{dt}. \tag{8}$$

Принимая во внимание формулу (3), имеем:

$$j_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad j_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad j_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{9}$$

Итак, *компоненты ускорения являются производными второго порядка от координат по времени.*

Даже в прямолинейном движении сказывается векторный характер ускорения. В этом случае вектор ускорения может быть направлен по движению при возрастании скорости или же против движения при убывании скорости. Если при этом j=const, то в первом случае мы имеем *равноускоренное* движение, а во втором — *равнозамедленное*.

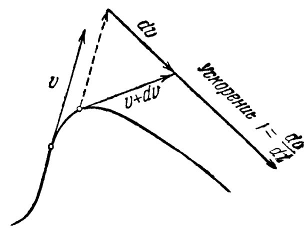

Рис. 7. При равномерном движении вектор ускорения на криволинейных участках тем более велик, чем больше кривизна.

По определению ускорения как вектора, указывающего геометрическое изменение скорости, ускорение оказывается не равным нулю и в случае, когда матереальная точка движется с неизменяющейся по величине скоростью, но по криволинейной траектории, так как вектор скорости изменяет свое направление. Это изменение происходит тем более резко, чем больше кривизна траектории. Таким образом, для равномерного движения ускорение только на прямолинейных участках пути равно нулю; для участков же криволинейных оно отлично от нуля и при большой кривизне может оказаться даже весьма значительным. Рассматривая рис. 7, мы видим, что при равномерном движении по закруглению вектор ускорения j направлен в ту сторону, куда траектория обращена своей вогнутостью; легко сообразить, что если бы движение по закруглению происходило с численно возрастающей скоростью (длина стрелки, изображающей вектор $\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v}$, больше длины стрелки вектора $\boldsymbol{v}$), то вектор ускорения j оказался бы направленным под некоторым острым углом к направлению движения; легко сообразить также, что при замедлении движения (длина стрелки $\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v}$ меньше, чем стрелки $\boldsymbol{v}$) вектор ускорения j отклоняется назад к стороне, противоположной направлению движения.

В зависимости от принятой единицы длины единицей ускорения является 1 *см/сек*^{2} или 1 *м/сек*^{2}, или же 1 *км/сек*^{2}.

Величину и направление вектора ускорения j можно определить, зная его компоненты j_x, j_y, j_z. Аналогично формулам (1), (4) и (7) численное значение ускорения равно:

$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}. \qquad (10)$$

§ 4. Тангенциальное и центростремительное ускорения

При исследовании механического движения часто оказывается весьма удобным разлагать вектор ускорения точки на два геометрических слагаемых: на ускорение по касательной к траектории этой точки и на ускорение по главной нормали. Докажем прежде всего, что не существует третьей слагаемой вектора ускорения в направлении третьей взаимно перпендикулярной оси (в направлении так называемой бинормали).

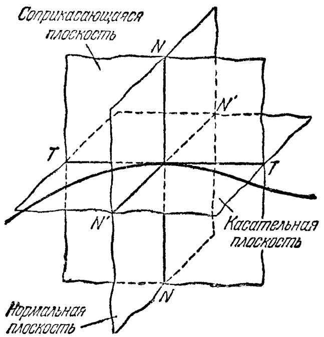

Рис. 8. TT — касательная, NN — главная нормаль, $N'N'$ — бинормаль.

Два следующих друг за другом элементарных перемещения $(d\boldsymbol{s})_1$ и $(d\boldsymbol{s})_2$ имеют общую точку, являющуюся концом первого перемещения и началом второго. Представим себе, что через эту общую их точку и через точки, являющиеся началом вектора $(d\boldsymbol{s})_1$ и концом вектора $(d\boldsymbol{s})_2$, проведена плоскость. Такая плоскость носит название *соприкасающейся плоскости* (рис. 8); ее можно определить также как плоскость, проведенную через касательные к траектории в двух бесконечно близких друг к другу точках. Так как вектор скорости постоянно имеет направление касательной к траектории, то очевидно, что оба вектора скорости $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$ в моменты времени t и $t+dt$ лежат в одной плоскости и именно в упомянутой соприкасающейся плоскости; следовательно, и геометрическое приращение скорости $d\boldsymbol{v}$, определяющее направление вектора ускорения $\boldsymbol{j}$, лежит в той же плоскости.

Плоскость, проведенную перпендикулярно к касательной и проходящую через точку касания, называют *нормальной плоскостью*.

Из бесчисленного множества нормалей, т. е. прямых, перпендикулярных к касательной в точке касания (все они лежат в нормальной плоскости), выделим две: одна из них лежит в соприкасающейся плоскости, эту прямую называют *главной нормалью*; другая перпендикулярна к ней, это — так называемая *бинормаль* (рис. 8). Поскольку вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости, а бинормаль пересекает эту плоскость под прямым углом, то ясно, что проекция вектора ускорения на бинормаль всегда равна нулю. Поэтому