Величину и направление вектора ускорения j можно определить, зная его компоненты j_x, j_y, j_z. Аналогично формулам (1), (4) и (7) численное значение ускорения равно:

$$j=\sqrt{j_x^2+j_y^2+j_z^2}. \qquad (10)$$

§ 4. Тангенциальное и центростремительное ускорения

При исследовании механического движения часто оказывается весьма удобным разлагать вектор ускорения точки на два геометрических слагаемых: на ускорение по касательной к траектории этой точки и на ускорение по главной нормали. Докажем прежде всего, что не существует третьей слагаемой вектора ускорения в направлении третьей взаимно перпендикулярной оси (в направлении так называемой бинормали).

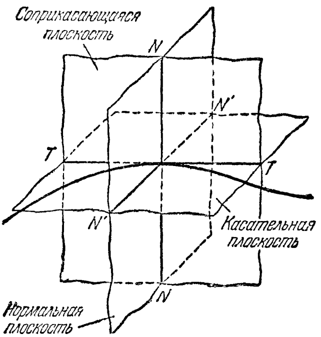

Рис. 8. TT — касательная, NN — главная нормаль, $N'N'$ — бинормаль.

Два следующих друг за другом элементарных перемещения $(d\boldsymbol{s})_1$ и $(d\boldsymbol{s})_2$ имеют общую точку, являющуюся концом первого перемещения и началом второго. Представим себе, что через эту общую их точку и через точки, являющиеся началом вектора $(d\boldsymbol{s})_1$ и концом вектора $(d\boldsymbol{s})_2$, проведена плоскость. Такая плоскость носит название *соприкасающейся плоскости* (рис. 8); ее можно определить также как плоскость, проведенную через касательные к траектории в двух бесконечно близких друг к другу точках. Так как вектор скорости постоянно имеет направление касательной к траектории, то очевидно, что оба вектора скорости $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$ в моменты времени t и $t+dt$ лежат в одной плоскости и именно в упомянутой соприкасающейся плоскости; следовательно, и геометрическое приращение скорости $d\boldsymbol{v}$, определяющее направление вектора ускорения $\boldsymbol{j}$, лежит в той же плоскости.

Плоскость, проведенную перпендикулярно к касательной и проходящую через точку касания, называют *нормальной плоскостью*.

Из бесчисленного множества нормалей, т. е. прямых, перпендикулярных к касательной в точке касания (все они лежат в нормальной плоскости), выделим две: одна из них лежит в соприкасающейся плоскости, эту прямую называют *главной нормалью*; другая перпендикулярна к ней, это — так называемая *бинормаль* (рис. 8). Поскольку вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости, а бинормаль пересекает эту плоскость под прямым углом, то ясно, что проекция вектора ускорения на бинормаль всегда равна нулю. Поэтому *всегда имеется возможность представить вектор ускорения как геометрическую сумму двух его компонентов: ускорения в направлении касательной и ускорения в направлении главной нормали.*

Пусть M и M' (рис. 9) представляют собой положения материальной точки, а v и v' — ее скорости в два соседних бесконечно близких момента времени. Найдем изменение скорости за этот бесконечно малый промежуток времени dt. Для этого перенесем вектор $\boldsymbol{v}'$ параллельно самому себе в точку M (изобразив его отрезком MA) и соединим концы векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$. Вектор $d\boldsymbol{v}$ и представит геометрическое приращение скорости за время dt.

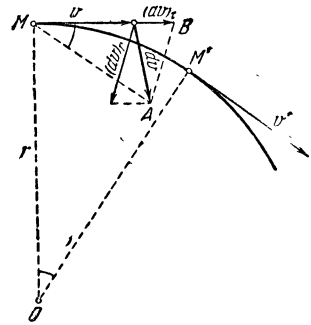

Рис. 9. Разложение вектора $d\boldsymbol{v}$ на компоненты $(d\boldsymbol{v})_\tau$ и $(d\boldsymbol{v})_r$.

Разложим теперь вектор $d\boldsymbol{v}$ на два составляющих, как показано на рис. 9. Мы получим параллелограмм, в котором диагональю является изменение скорости dv; стороны этого параллелограмма мы обозначим $(d\boldsymbol{v})_\tau$ и $(d\boldsymbol{v})_r$.

Вектор $(dv)_\tau$ характеризует изменение скорости только по в е л и ч и н е; он численно равен приращению численного значения скорости dv; направлен этот вектор по касательной к траектории. Деля $(d\boldsymbol{v})_\tau$ на dt, получим *тангенциальное ускорение* j_τ:

$$j_\tau = \frac{dv}{dt}. \tag{11}$$

Так как численное значение скорости равно производной первого порядка от длины пути l по времени, то из формулы (11) следует, что *тангенциальное ускорение равно производной второго порядка от длины пути по времени*:

$$j_\tau = \frac{d^2l}{dt^2}. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь вектор $(d\boldsymbol{v})_r$ (или, что то же, вектор, изображаемый отрезком BA). Он характеризует изменение скорости по н а п р а в л е н и ю.

Через точки M и M' (рис. 9) проведем перпендикуляры к скоростям $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$. Они пересекутся в некоторой точке O. Бесконечно малую дугу кривой MM' можно рассматривать как дугу окружности радиуса $OM=r$. Окружность, дуга которой совпадает с элементом кривой в данной точке (окружность, проведенную через три бесконечно близкие точки кривой), называют *кругом кривизны*; радиус этого круга называют *радиусом кривизны*, а центр этого круга — *центром кривизны*. Понятно, что для различных участков кривой радиус кривизны будет, вообще говоря, неодинаков.

Сопоставим треугольники MOM' и AMB. Они подобны, так как оба равнобедренны и имеют равные углы при вершинах, поэтому

$$\frac{AB}{MM'}=\frac{MA}{OM}, \quad \text{или} \quad \left|\frac{(dv)_r}{v\,dt}\right|=\frac{v'}{r}; \quad \left|\frac{(dv)_r}{dt}\right|=\frac{v'v}{r}.$$

В пределе $v'=v$, поэтому

$$j_r=\frac{v^2}{r}, \tag{13}$$

где j_r обозначает предельное значение $\frac{(dv)_r}{dt}$, т. е. *центростремительное ускорение*, определяемое изменением скорости только по направлению.

Предельное направление BA, а значит, и направление центростремительного ускорения j_r совпадает с направлением главной нормали к траектории.

Таким образом, *при движении материальной точки по криволинейной траектории вектор ускорения геометрически слагается из ускорения* тангенциального, *численно равного* $j_\tau=\frac{dv}{dt}$ *и направленного по касательной, и* центростремительного, *численно равного* $j_r=\frac{v^2}{r}$ *и направленного по главной нормали к центру кривизны.*

Следовательно, численное значение полного ускорения может быть выражено формулой

$$j=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{r}\right)^2}. \tag{14}$$

В частном случае при равномерном движении материальной точки по окружности тангенциальное ускорение равно нулю, а центростремительное ускорение направлено к центру окружности и равно отношению квадрата скорости к радиусу окружности.

§ 5. Угловая скорость и угловое ускорение

Если классифицировать движения по форме траектории, то простейшими видами движения являются: прямолинейное движение и движение материальной точки по окружности.

При движении материальной точки по окружности удобно избрать в качестве координаты угол φ, на который поворачивается радиус, указывающий мгновенное положение точки; угол поворота φ иначе называют *фазой вращения*. Кинематическое уравнение движения материальной точки по окружности выражает угол поворота как некоторую функцию времени t:

$$\varphi=f(t).$$