Сопоставим треугольники MOM' и AMB. Они подобны, так как оба равнобедренны и имеют равные углы при вершинах, поэтому

$$\frac{AB}{MM'}=\frac{MA}{OM}, \quad \text{или} \quad \left|\frac{(dv)_r}{v\,dt}\right|=\frac{v'}{r}; \quad \left|\frac{(dv)_r}{dt}\right|=\frac{v'v}{r}.$$

В пределе $v'=v$, поэтому

$$j_r=\frac{v^2}{r}, \tag{13}$$

где j_r обозначает предельное значение $\frac{(dv)_r}{dt}$, т. е. *центростремительное ускорение*, определяемое изменением скорости только по направлению.

Предельное направление BA, а значит, и направление центростремительного ускорения j_r совпадает с направлением главной нормали к траектории.

Таким образом, *при движении материальной точки по криволинейной траектории вектор ускорения геометрически слагается из ускорения* тангенциального, *численно равного* $j_\tau=\frac{dv}{dt}$ *и направленного по касательной, и* центростремительного, *численно равного* $j_r=\frac{v^2}{r}$ *и направленного по главной нормали к центру кривизны.*

Следовательно, численное значение полного ускорения может быть выражено формулой

$$j=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{r}\right)^2}. \tag{14}$$

В частном случае при равномерном движении материальной точки по окружности тангенциальное ускорение равно нулю, а центростремительное ускорение направлено к центру окружности и равно отношению квадрата скорости к радиусу окружности.

§ 5. Угловая скорость и угловое ускорение

Если классифицировать движения по форме траектории, то простейшими видами движения являются: прямолинейное движение и движение материальной точки по окружности.

При движении материальной точки по окружности удобно избрать в качестве координаты угол φ, на который поворачивается радиус, указывающий мгновенное положение точки; угол поворота φ иначе называют *фазой вращения*. Кинематическое уравнение движения материальной точки по окружности выражает угол поворота как некоторую функцию времени t:

$$\varphi=f(t).$$

Когда угол поворота изменяется пропорционально времени (что имеет место, если точка движется по окружности с неизменной по величине скоростью), то вращение называют равномерным.

Быстроту вращения характеризуют *угловой скоростью* ω, под которой понимают отношение бесконечно малого угла поворота $d\varphi$ к промежутку времени dt, в течение которого происходит этот поворот:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{15}$$

Единицей угловой скорости является угловая скорость такого равномерного вращения, при котором тело за 1 сек. поворачивается на угол в 1 радиан[1]). Эту единицу угловой скорости обозначают так: $\frac{1}{сек} = сек^{-1}$.

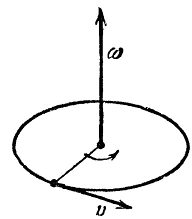

Рис. 10. Взаимное расположение векторов линейной и угловой скорости.

Понятно, что для полной характеристики движения материальной точки по окружности должны быть указаны не только численное значение угловой скорости, но и ось вращения, а также направление вращения вокруг этой оси. Поэтому угловую скорость представляют как вектор, направленный по оси вращения, т. е. перпендикулярно к плоскости, в которой происходит вращение, причем этот вектор $\boldsymbol{\omega}$ считают направленным туда, куда нужно смотреть, чтобы видеть вращение происходящим в сторону движения часовой стрелки (рис. 10).

Если движущаяся по окружности материальная точка удалена от оси вращения на расстояние r то длина дуги, которую точка описывает за время dt, равна произведению угла поворота $d\varphi$ (выраженного в радианах) на радиус r: $dl = r d\varphi$. Разделив обе части этого равенства на dt и замечая, что $\frac{dl}{dt}$ есть линейная скорость v, а $\frac{d\varphi}{dt}$ — угловая скорость ω, находим (рис. 11):

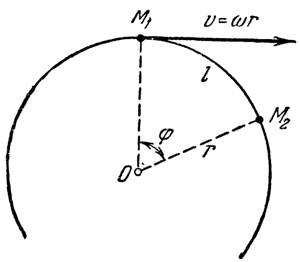

Рис. 11 Линейная скорость равна произведению угловой скорости на радиус.

$$v = \omega r. \tag{16}$$

Когда вращение происходит неравномерно (т. е. когда угловая скорость изменяется со временем), быстроту изменения угловой скорости характеризуют величиной, которую называют *угловым ускорением*. Если за бесконечно малый промежуток времени dt угловая скорость изменилась на $d\omega$, то под угловым ускорением

[1]) Напомним, что 1 радиан (т. е. угол, для которого длина дуги равна радиусу) $= \frac{360}{2\pi} = 57°17'44'',806$.

понимают отношение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \tag{17}$$

Единицей углового ускорения является $\frac{1}{сек^2} = сек^{-2}$, т. е. такое ускорение, когда в каждую секунду угловая скорость возрастает на единицу угловой скорости.

Угловое ускорение представляют также как вектор. Если положение и радиус окружности, по которой происходит вращение, со временем не изменяются, то вектор углового ускорения ε в случае ускоренного вращения направлен по оси вращения в ту же сторону, что и вектор угловой скорости, и в сторону прямо противоположную — в случае замедленного вращения.

Как было показано выше, линейное ускорение точки, равномерно вращающейся по окружности радиуса r со скоростью v (ее центростремительное ускорение), равно $j_r = \frac{v^2}{r}$; подставляя сюда $v = \omega r$, получим:

$$j_r = \omega^2 r. \tag{18}$$

В общем случае неравномерного вращения материальной точки по окружности ее линейное ускорение, как и во всяком криволинейном движении, может быть разложено на две составляющие: на указанное выше центростремительное ускорение $j_r = \omega^2 r$ и тангенциальное ускорение (при $r = \text{const}$)

$$j_\tau = \frac{dv}{dt} = \varepsilon r. \tag{19}$$

§ 6. Абсолютное, переносное и относительное движения

Все в природе движется. Любое тело, которое мы условно считаем неподвижным, в действительности движется. Одно какое-либо движение накладывается на другое движение. Поэтому весьма важно знать, как складываются движения, как складываются скорости и ускорения какого-либо тела, которое одновременно участвует в нескольких движениях. Чтобы разобраться в этом вопросе, прежде всего введем представление о так называемом абсолютном (в условном смысле) движении, о переносном и относительном движениях.

Одно и то же движение представляется нам происходящим поразному в зависимости от способа его наблюдения. Когда на железнодорожной станции один из двух стоящих рядом поездов приходит в движение, то пассажирам другого, неподвижного, поезда кажется, что пошел их поезд. Конечно, достаточно бывает бросить взгляд на платформу станции, чтобы эта иллюзия исчезла. Станционные постройки в этом случае играют роль основной системы ориентировки.