этим символом знак $\sum$. Поэтому аналитически работа переменной силы может быть выражена формулой

$$A = \int_a^b F_l \cdot dl. \tag{3}$$

Силу $\boldsymbol{F}$ можно рассматривать как геометрическую сумму трех векторов, направленных по координатным осям. Алгебраические величины этих векторов (компоненты силы $\boldsymbol{F}$) обозначим через X, Y, Z. Следовательно, работа силы $\boldsymbol{F}$ на перемещении $d\boldsymbol{s}$ должна быть равна сумме работ компонентов силы при том же перемещении $d\boldsymbol{s}$. Это позволяет применить для вычисления элемента работы наряду с формулой (2) еще такую формулу:

$$\delta A = X\cos(\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{s}) \cdot ds + Y\cos(\boldsymbol{y}, d\boldsymbol{s}) \cdot ds + Z\cos(\boldsymbol{z}, d\boldsymbol{s}) \cdot ds. \tag{4}$$

Здесь множители при компонентах силы представляют собой не что иное, как проекции элементарного перемещения $d\boldsymbol{s}$ на оси координат: $ds \cdot \cos(\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{s}) = dx$ и т. д. Следовательно,

$$\delta A = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz. \tag{5}$$

Суммарная работа выразится интегралом

$$A = \int_a^b (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \tag{6}$$

§ 19. Кинетическая энергия и потенциальная энергия

Кинетическая энергия тела измеряется работой, которую тело может произвести благодаря инерции при затормаживании тела до остановки. Вычислим эту работу.

Сила инерции, развиваемая движущимся телом при торможении, производит работу, идущую на преодоление сопротивлений движе-

---

В каждом из образовавшихся промежутков (x_{k-1}, x_k) выберем точку ξ_k и составим сумму $S = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$.

В анализе доказывается, что при некоторых предположениях, налагаемых на функцию $f(x)$, эти суммы стремятся к вполне определенному пределу если только длина наибольшего из частичных промежутков стремится к нулю, и что предел этот не зависит ни от того, как выбраны точки ξ_k в промежутках (x_{k-1}, x_k), ни от того, каким образом мы разбиваем промежуток (a, b) на частичные промежутки. Этот предел называется определенным интегралом от a до b функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

нию. Сила инерции действует по направлению движения ($\cos\alpha = 1$) и численно равна $-m\frac{dv}{dt}$. В течение бесконечно малого промежутка времени, когда затормаживаемое тело, преодолевая сопротивления движению, перемещается на расстояние ds, развиваемая телом сила инерции производит работу

$$\delta A = -m\frac{dv}{dt}\cdot ds,$$

или (делаем такое преобразование: $\frac{dv}{dt}\cdot ds = dv\frac{ds}{dt} = dv\cdot v$)

$$\delta A = -mv\cdot dv.$$

Здесь в правой части стоит знак минус, но δA есть величина положительная, так как при затормаживании $dv < 0$. Кинетическая энергия тела, движущегося со скоростью v, представляет собой сумму работ, производимых силой инерции при затормаживании тела до полной остановки (т. е. в течение того промежутка времени, пока скорость тела убывает от значения v до нуля). Величину этой суммы мы определим графически [1]).

Будем изображать численное значение скорости длиной отрезка, отложенного по оси OX, а также длиной такого же отрезка, отложенного в направлении другой оси OY (рис. 28). Очевидно, что численное значение произведения $v\cdot dv$ изобразится площадью весьма малой вертикальной полоски, имеющей высоту v и ширину dv (будем представлять себе величину dv как положительную, тогда в формуле для δA знак минус должен быть изменен на плюс: $\delta A = mv\cdot dv$).

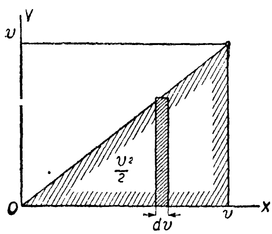

Рис. 28. К вычислению кинетической энергии.

Для различных моментов времени скорость v затормаживаемого тела будет иметь различную величину, а также различную величину будет иметь численное изменение скорости dv, происходящее в некоторый определенный промежуток времени dt. Поэтому и работа силы инерции за один и тот же промежуток времени в различные моменты времени будет неодинаковой (на нашей диаграмме изображающие произведение $v\cdot dv$ площадки будут иметь различную вы-

[1]) Применением интегрального исчисления эта сумма находится сразу:

$$E_{\text{кин}} = \sum \delta A = -\int_v^0 mv\,dv = \frac{mv^2}{2}.$$

соту и неодинаковую ширину). Суммируя работу, произведенную силой инерции за все время затормаживания, мы можем вынести за скобку величину массы m, которая входит в выражение каждой элементарной работы. Что же касается суммы произведений $v \cdot dv$, то нетрудно сообразить, что она изобразится на нашей диаграмме общей площадью всех отдельных площадок, подобных той, которая заштрихована на рис. 28; она будет равна, следовательно, $\frac{v^2}{2}$. Таким образом, мы вывели теорему о кинетической энергии.

Работа, которую движущееся тело способно произвести при его затормаживании, не зависит ни от траектории движения, ни от того, как (с какой быстротой и каким образом) производилось затормаживание. Работа эта — кинетическая энергия тела — равна половине произведения массы на квадрат скорости [1]:

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}. \tag{7}$$

По самому ходу приведенного выше рассуждения ясно, что *кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий тел (или материальных точек), составляющих систему*:

$$E_{\text{кин}} = \sum \frac{mv^2}{2}. \tag{8}$$

Потенциальная энергия измеряется работой, которую тело способно совершить при перемещении из исходного положения в какое-либо другое положение. Следовательно, потенциальная энергия только тогда имеет определенный физический смысл, когда указаны два сопоставляемых друг с другом положения тела.

Из начального курса физики известно, что потенциальная энергия тяжести измеряется произведением веса тела на высоту поднятия: $U = Ph$. Если в какой-либо местности, расположенной на высоте 10 *м* над уровнем моря, мы поднимем некоторое тело на высоту 1 *м* над поверхностью земли, то по отношению к уровню моря потенциальная энергия тяжести его будет, как легко сообразить, в 11 раз больше, чем по отношению к поверхности земли в данной местности. Потенциальная энергия того же тела по отношению к вершине какой-либо горы, очевидно, представит собой величину отрицательную (от перемещения тела вверх работа не может быть получена, но, напротив, на это перемещение она должна быть затрачена).

---

[1]) Представление о кинетической энергии введено Лейбницем (1686), который применил термин «живая сила» для произведения mv^2. Позже, по предложению Кориолиса, живой силой стали называть величину $\frac{1}{2} mv^2$.

В физике принято потенциальную энергию рассматривать по отношению к тому положению взаимодействующих тел, когда эти тела бесконечно удалены друг от друга. При таком рассмотрении потенциальная энергия взаимного притяжения двух каких-либо (или же многих) тел всегда представляет собой величину отрицательную, так как переход от какого-либо заданного расположения тел к тому, когда они бесконечно удалены друг от друга, не дает работы, но, напротив, требует для своего осуществления затраты работы по преодолению действующих между телами сил притяжения. В противоположность этому потенциальная энергия отталкивания представляет собой величину положительную.

Зная закон взаимодействия тел, т. е. зная, как изменяется с расстоянием сила их взаимодействия, всегда можно вычислить для любого заданного расположения тел их потенциальную энергию (для этого, как уже было пояснено, надо подсчитать работу, производимую силами взаимодействия при удалении рассматриваемых тел из занимаемых ими положений на бесконечно большое расстояние друг от друга). В последующем нам придется неоднократно проделывать такие вычисления.

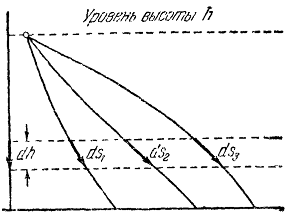

Рис. 29. Проекции элементарных перемещений ds_1, ds_2, ds_3 на вертикальное направление равны dh.

Работу сил взаимодействия можно отождествлять с потенциальной энергией только в тех случаях, когда работа, производимая силами взаимодействия, не зависит от вида траекторий, по которым взаимодействующие тела перемещаются из начального расположения в конечное расположение. Нужно, чтобы работа однозначно определялась начальным и конечным расположениями тела. Иначе говоря, *работа должна быть одинакова для всех путей перемещения* тел из начального в конечное расположение.

Например, работа силы тяжести не зависит от пути перемещения. Действительно, если P есть вес тела, то по формуле (3) работа тяжести при перемещении с уровня 1 на уровень 2 равна:

$$A = \int_1^2 P \cdot \cos\alpha \cdot ds,$$

где α — угол, образуемый элементарным перемещением ds с вертикалью. Обозначим высоту тела над уровнем моря через h. Очевидно, что $ds \cdot \cos\alpha = dh$ (рис. 29). Далее, считая, что сила тяжести неизменна (для не слишком больших высот подъема), мы можем вынести P как общий множитель при всех слагаемых за знак интеграла. Тогда под знаком интеграла останется бесконечно малое приращение высоты dh, наблюдаемое при перемещении тела ds по какой угодно траектории. Очевидно, что алгебраическая сумма всех этих бесконечно малых изменений высоты, $\int dh$, по какой бы траектории мы ни перемещали тело от уровня моря до высоты h, всегда будет равна h:

$$U_2 - U_1 = A = P \cdot h.$$

Стало быть, работа силы тяжести действительно не зависит от пути перемещения.

Под потенциальной энергией понимают «запас» работы, которая может быть произведена системой за счет изменения положения тел системы. Следовательно, по мере того как система *производит* работу A, ее потенциальная энергия U *убывает*. Поэтому

$$dA = -dU. \tag{9}$$

§ 20. Системы мер и размерность механических величин

Для измерения масс и сил часто пользуются единицами, имеющими одинаковое название: например, килограммом для массы в 1 *кг* и для силы в 1 *кГ*. Применение одного термина для обозначения двух различных единиц — единицы массы и единицы силы — приводит к большой путанице. Чтобы обезопасить себя от ошибок, в которые легко впасть вследствие двойственного смысла термина «килограмм» (а также и «грамм»), нужно помнить, что системы мер механических величин установлены так, что коэффициент пропорциональности в уравнении второго закона $F = Cmj$ при пользовании любой системой мер равен единице, $C = 1$.

Абсолютная система единиц. В физике принято измерять длины в сантиметрах (*см*), время — в секундах (сек.) и массы — в граммах (*г*). Эту систему называют *абсолютной системой единиц*, или системой *CGS* [1]). Термин «абсолютная» весьма неудачен, так как эта система единиц установлена путем соглашения, причем избранные единицы вовсе не представляют каких-либо величин, выбор которых был бы подсказан их особой физической ролью.

В системе *CGS* единицей скорости служит 1 *см/сек*, единицей ускорения служит 1 *см/сек*^{2}. Положив в вышеприведенной формуле $C=1$, мы видим, что в *системе CGS единицей силы должна служить такая сила, под действием которой масса в* 1 *г приобретает ускорение в* 1 *см/сек*^{2}. Этой силе присвоено название *дина*.

Масса в 1 *г* под действием силы в одну дину приобретает ускорение только 1 *см/сек*^{2}. Очевидно, что сила тяжести, приложенная к каждому грамму массы, во столько раз больше одной дины, во сколько раз ускорение g, вызываемое силой тяжести, больше 1 *см /сек*^{2}. Следовательно, *вес* 1 *г массы на высоте уровня моря и на широте* 45° *равен* 980,665 *дины*. Там же вес массы в 1 *кг* равен 980 665 динам, т. е. почти миллиону дин. Силу, равную весу 1 *кг*

[1]) Система сантиметр — грамм — секунда.