§ 22. Закон сохранения количества движения и теорема о движении центра масс

Напишем уравнение, выражающее второй закон Ньютона, для каждого из n тел механической системы; равнодействующую приложенных к данному телу внутренних сил системы обозначим вектором $\boldsymbol{f}$, равнодействующую приложенных к нему внешних сил — вектором $\boldsymbol{F}$:

$$\frac{d(m_1\boldsymbol{v}_1)}{dt}=\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{F}_1,$$
$$\frac{d(m_2\boldsymbol{v}_2)}{dt}=\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{F}_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d(m_n\boldsymbol{v}_n)}{dt}=\boldsymbol{f}_n+\boldsymbol{F}_n.$$

Сложим (по правилу многоугольника) векторы, стоящие в левых и в правых частях этих уравнений:

$$\frac{d}{dt}(m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2+\ldots+m_n\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\ldots+\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\ldots$$

Находящаяся в правой части уравнения сумма внутренних сил

$$\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\ldots+\boldsymbol{f}_n$$

равна нулю, так как все эти силы попарно равны по величине и противоположно направлены. Остаются лишь внешние силы. Поэтому получаем:

$$\frac{d}{dt}(m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2+\ldots+m_n\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\ldots+\boldsymbol{F}_n. \quad (1)$$

Геометрическое изменение количества движения системы, происходящее за бесконечно малый промежуток времени и разделенное на этот промежуток времени, равно геометрической сумме внешних сил, действующих на систему. Другими словами, изменение со временем величины и направления количества движения системы определяется действующими на систему внешними силами. *Внутренние силы не могут изменить количества движения системы в целом.* Следовательно, в системе, на которую внешние силы не действуют или их равнодействующая равна нулю, количество движения остается постоянным.

Этот закон сохранения количества движения является одним из важнейших законов физики. Приведем несколько примеров, поясняющих этот закон.

Когда человек, ранее стоявший неподвижно на тележке, прыгает вперед, то тележка откатывается назад, так что их суммарное количество движения, которое было равно нулю, остается равным нулю (рис. 32): $m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2=0$.

Если человек вбегает на катящуюся ему навстречу тележку (легкую и медленно двигающуюся), то, остановившись на ней, он будет двигаться вместе с тележкой с таким же количеством движения, какой была вначале геометрическая сумма количеств движения человека и тележки:

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}.$$

Когда человек бежит через неподвижно стоящую тележку, не замедляя скорости своего движения, тележка останется стоять неподвижно.

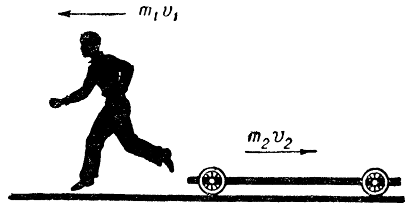

Рис. 32. $m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = 0$

При разрыве шрапнели осколки разлетаются в разные стороны, но никогда не летят все вниз или все вверх от траектории снаряда. Геометрическая сумма количеств движения осколков после разрыва остается такой же, каким было количество движения снаряда до разрыва (рис. 33).

Внутренние силы не влияют на движение центра масс. Но внутренние силы могут вызвать взаимное движение тел системы. При этом изменения скоростей двух тел под действием внутренних сил обратно пропорциональны их массам и противоположны по направлению.

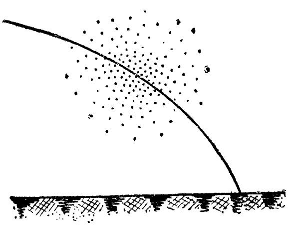

Рис. 33. Центр масс разлетающихся в разные стороны осколков шрапнели продолжает двигаться по той же траектории, по которой двигался бы снаряд, если бы разрыва не произошло.

Так, когда человек спрыгивает с легкой тележки, то она с большой скоростью откатывается назад, тогда как тяжелая тележка откатится медленно. Оба эти движения вызваны действием внутренних сил; подобное проявление внутренних сил носит название *отдачи*. Стоя на коньках, бросим вперед какой-либо тяжелый предмет; мы неизбежно покатимся назад, но медленно, так как наша масса сравнительно велика. При выстреле, если орудие не укреплено неподвижно (т. е. нет внешнего противодействия), оно откатывается назад.

Явлением отдачи объясняется движение ракеты: ракета взрывом (внутренние силы) выбрасывает назад газы; выброшенные газы и сама ракета удаляются в противоположные стороны от их общего центра масс.

Докажем, что центр масс системы, если представить себе, что в нем сосредоточена вся масса системы, является носителем всего количества движения системы.

Вообразим, что внутри системы действуют бесконечно возрастающие с течением времени силы взаимного притяжения частиц и тел, а внешних сил нет. Тогда, продолжая совместное движение по инерции, все материальные частицы системы будут одновременно сближаться, и точкой их встречи будет центр масс (§ 21). В дальнейшем они будут двигаться совместно, как одно тело с массой

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n,$$

а так как при отсутствии внешних сил количество движения системы измениться не могло, то скорость $\boldsymbol{v}$ совместного движения соединившихся масс должна удовлетворять условию:

$$M\boldsymbol{v} = \text{количеству движения системы.}$$

Этот вывод имеет большое принципиальное значение, и его формулируют так: *полное количество движения механической системы таково же, как если бы вся масса системы была сосредоточена в ее центре масс и двигалась вместе с ним.*

Поэтому количество движения системы называют также количеством движения ее центра масс. Равенство количества движения системы и количества движения ее центра масс математически выражается формулой

$$M\boldsymbol{v} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n, \tag{2}$$

где M — масса всей системы, $\boldsymbol{v}$ — скорость движения ее центра масс, m_1 m_2, ..., m_n— массы отдельных тел (или материальных точек) системы, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ — их скорости.

Заменив в уравнении (1) геометрическую сумму количеств движения тел системы вектором количества движения ее центра масс, получаем:

$$\frac{d(M\boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n. \tag{3}$$

Это новое уравнение таково же, как уравнение, выражающее второй закон Ньютона для тела с массой M, движущегося под действием силы

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n.$$

Отсюда делаем вывод: *центр масс механической системы движется так, как если бы в нем была сосредоточена вся масса системы и на него действовала бы сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к телам системы.*

Эту теорему называют *теоремой о движении центра масс.*

В частности, при отсутствии внешних сил или при равенстве нулю их геометрической суммы центр масс системы движется как изолированное тело, т. е. равномерно и прямолинейно, либо остается в покое.

Из независимости действия сил следует применимость теоремы о движении центра масс к движению вдоль каждого направления в отдельности. Математически это выражается тем фактом, что векторное уравнение (3) равносильно трем скалярным уравнениям для проекций тех же векторов на три взаимно перпендикулярные оси:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}(Mv_x) &= F_{1x}+F_{2x}+\ldots+F_{nx},\\ \frac{d}{dt}(Mv_y) &= F_{1y}+F_{2y}+\ldots+F_{ny},\\ \frac{d}{dt}(Mv_z) &= F_{1z}+F_{2z}+\ldots+F_{nz}.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Руководствуясь принципом независимости действия сил и исследуя движение центра массы вдоль какого-нибудь направления, например вдоль оси x, мы можем рассматривать это движение так, как если бы движения в направлении двух других осей не происходило.

К примерам, которые были приведены выше для пояснения закона сохранения количества движения и которые в то же время служат подтверждением теоремы о движении центра массы, присоединим еще один важный пример. Представим себе, что на твердое тело, находившееся в покое, начали действовать две численно равные, противоположно направленные параллельные силы (так называемая *пара сил*). Как будет двигаться тело? На первый взгляд кажется, что тело начнет вращаться вокруг точки D, лежащей посредине между точками приложения пары сил (рис. 34). Но это заключение ошибочно (нередко эту ошибку делают при решении задач). Геометрическая сумма приложенных внешних сил $\boldsymbol{F}$ и $-\boldsymbol{F}$ равна нулю. Следовательно, движение центра масс не изменится. Он был в покое и останется в покое. Тело будет вращаться вокруг неподвижного центра масс C.

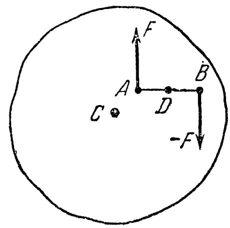

Рис. 34. Как бы ни была приложена к телу пара сил $\boldsymbol{F}$ и $-\boldsymbol{F}$, она вращает тело вокруг оси, проходящей через центр масс C.

Если нагрузить лодку-плоскодонку посредине тяжелыми камнями, много тяжелее веса нашего тела, и, сев где угодно, на носу или на корме лодки, грести одним веслом вперед, другим назад, то лодка будет поворачиваться вокруг середины (вокруг центра масс). Если переложить камни на нос лодки, то центр масс, а с ним и центр вращения переместятся к носу. Наконец, если камни положить на корме, лодка будет поворачиваться около центра масс, перемещенного к корме.

[В применении к вращательному движению закон сохранения количества движения может быть преобразован в форму, более удобную для анализа вращательных движений,— в *закон сохранения момента количества движения*. Понятие о моменте количества движения (или, что то же, об импульсе вращения) и закон сохранения момента количества движения при вращении твердого тела будут пояснены в главе VII.]