§ 23. Закон сохранения энергии в консервативных системах. Минимум потенциальной энергии при равновесии

Работа силы тяжести, как было пояснено в § 19, не зависит от пути перемещения тела с одного уровня на другой. Работа сил тяготения вообще не зависит от пути перемещения. Точно так же не зависит от пути перемещения и работа сил электростатического взаимодействия наэлектризованных тел.

Силы взаимодействия, работа которых не зависит от пути перемещения тел, называют *консервативными силами* (от латинского conservare, что значит «сохранять»).

Это название имеет следующий смысл: в механических системах, где действуют одни только консервативные силы (в *консервативной системе*), сумма кинетической и потенциальной энергий всегда остается неизменной. Иначе говоря, в консервативной системе при ее движении может происходить превращение кинетической энергии только в потенциальную энергию или же потенциальной в кинетическую, но не в какие-либо другие виды энергии.

Таким образом, консервативная система являет собой пример системы, где движение всегда остается механическим движением и не превращается в более сложные формы движения. В действительности во всех механических системах наряду с консервативными силами действуют и неконсервативные силы (например, трение). Кроме того, не следует забывать, что потенциальная энергия представляет собой скрытые формы движения, более сложные, чем механическое движение. Поэтому механический закон сохранения энергии в консервативных системах не имеет такого (всеобщего) значения, как универсальный закон сохранения энергии, указывающий на превращаемость всех видов энергии друг в друга.

Закон сохранения энергии в консервативных системах можно вывести из законов Ньютона. Исходим из уравнений движения

$$X = m\frac{dv_x}{dt}, \qquad Y = m\frac{dv_y}{dt}, \qquad Z = m\frac{dv_z}{dt}.$$

Напишем эти уравнения для всех материальных точек механической системы. Умножим первое из этих уравнений для первой материальной точки на dx_1; аналогичное уравнение для второй материальной точки умножим на dx_2 и т. д.; каждое второе уравнение умножим соответственно на dy_1, dy_2 и т. д.; каждое третье — на dz_1, dz_2 и т. д. Сложим теперь все эти уравнения; получаем:

$$\sum (X_i\,dx_i + Y_i\,dy_i + Z_i\,dz_i) = \\ = \sum m_i\left(\frac{dv_{x,i}}{dt}\,dx_i + \frac{dv_{y,i}}{dt}\,dy_i + \frac{dv_{z,i}}{dt}\,dz_i\right).$$

Здесь Σ означает, что берется сумма написанных выражений для всех материальных точек, $i=1, 2, \ldots, n$. Каждый из членов, стоящих в правой части, преобразуем следующим образом:

$$\frac{dv_{x,\,i}}{dt}\,dx_i = dv_{x,\,i}\cdot\frac{dx_i}{dt} = v_{x,i}\cdot dv_{x,\,i}.$$

Это произведение представляет собой дифференциал величины $\frac{v^2{}_{x,\,i}}{2}$. Учитывая это, а также принимая во внимание, что

$$v^2_{x,\,i} + v^2_{y,\,i} + v^2_{z,\,i} = v^2_i,$$

предыдущее уравнение можно переписать так:

$$\sum (X_i\,dx_i + Y_i\,dy_i + Z_i\,dz_i) = \sum d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right).$$

(Массы m_1, m_2 и т. д. мы считаем неизменными; на этом основании величины $m_i d\left(\frac{v_i^2}{2}\right)$ мы заменили через $d\left(\frac{m_i v_i}{2}\right)$; в случае масс, изменяющихся во время движения, мы должны были бы исходить из уравнений (1), где под знаком дифференциала находится количество движения, а не скорость.)

В правой части вышеприведенного уравнения мы имеем изменение кинетической энергии системы за время dt. Поэтому правую часть уравнения можно обозначить $dE_{\text{кин}}$, где $E_{\text{кин}}$— кинетическая энергия системы. Что же касается левой части уравнения, то это есть работа dA, производимая всеми материальными точками системы за время dt. Когда силы консервативны, эта работа однозначно определяется положением материальных точек до и после перемещения за время dt и поэтому может быть выражена как убыль потенциальной энергии. Таким образом, вышеприведенное уравнение для консервативных систем приобретает такой вид:

$$-dU = dE_{\text{кин}},$$

или

$$dE_{\text{кин}} + dU = 0,$$

или, наконец, что то же:

$$d(E_{\text{кин}} + U) = 0.$$

Итак, изменение суммы кинетической и потенциальной энергий консервативной системы за любой бесконечно малый промежуток времени dt, а значит, и за любой конечный промежуток времени равно нулю. Иначе говоря, *полная энергия консервативной системы* *(сумма кинетической и потенциальной энергий) остается при движении системы неизменной:*

$$E_{\text{кин}} + U = \text{const}. \tag{5}$$

Так, например, потенциальная энергия тяжести какого-либо тела при падении тела убывает на столько, на сколько при этом возрастает кинетическая энергия тела. Потенциальная энергия тела, брошенного вверх, по мере подъема тела возрастает на величину, равную убыли кинетической энергии. Подъем тела, брошенного вверх, прекращается, когда вся кинетическая энергия превращается в потенциальную.

При каждом качании маятника, когда маятник достигает крайнего отклонения, вся кинетическая энергия маятника превращается в потенциальную; при свободном качании маятника полная энергия маятника во всех его положениях одинакова.

Затухания колебаний маятника, так же как и потеря некоторой доли кинетической энергии у тела, брошенного в воздухе вверх, когда оно опускается до первоначального уровня, объясняются влиянием сил трения, вследствие которых ни одна механическая система в действительности не является вполне консервативной. Однако такие системы, как, например, солнечная система (движение планет вокруг Солнца), можно с чрезвычайно большой степенью точности считать консервативными системами.

Докажем весьма важную теорему, что *состоянием устойчивого равновесия изолированной консервативной системы является такое состояние, в котором потенциальная энергия системы минимальна.*

По закону сохранения энергии, полная энергия консервативной системы, слагающаяся из ее кинетической энергии E и потенциальной энергии U, должна оставаться неизменной:

$$E_{\text{кин}} + U = \text{const}.$$

Кинетическая энергия есть всегда величина *положительная.* Поэтому, если в начальный момент все тела, составляющие рассматриваемую нами систему, были *неподвижны,* то движение может возникнуть только вследствие *уменьшения* потенциальной энергии, причем убыль потенциальной энергии будет равна возникшей кинетической энергии. Если же в начальный момент потенциальная энергия была *минимальна* (что имеет место, когда любое перемещение тел в новое их положение приводит к увеличению потенциальной энергии), то тогда, очевидно, не может произойти возрастание кинетической энергии, и движение, отсутствовавшее в начальный момент, никогда не возникнет; система будет пребывать в *устойчивом равновесии,* из которого она может быть выведена только действием внешних сил.

В частном случае, когда имеется одно какое-либо тело, находящееся под действием силы тяжести, можно утверждать, что состоянию устойчивого равновесия будет соответствовать *наинизшее положение центра тяжести тела*; в противном случае потенциальная энергия тяжести не была бы минимальной.

§ 24. Число степеней свободы и работа сил связи. Принцип возможных перемещений

Числом степеней свободы системы называют число *независимых* механических *движений*, которые одновременно может испытывать механическая система. Иначе говоря, числом степеней свободы называют число *независимых координат*, определяющих положение механической системы (т. е. положение всех ее материальных точек).

Положение одной материальной точки определяется тремя координатами x, y, z; если механическая система состоит из n материальных точек, то нужно знать $3n$ координат этих точек, чтобы иметь точное представление о положении механической системы в пространстве. Однако весьма часто движение материальных точек бывает стеснено теми или иными условиями, вследствие чего не все координаты являются независимыми; зная часть координат, другие можно определить из условий, ограничивающих свободу движения материальных точек.

Материальная точка, движение которой *не* стеснено никакими условиями, имеет, очевидно, *три* степени свободы. Если движение материальной точки ограничено так, что точка может перемещаться только по некоторой поверхности $f(x, y, z) = 0$, то достаточно знать две координаты точки, чтобы третью координату можно было вычислить; следовательно, материальная точка, принужденная двигаться *по поверхности*, имеет *две* степени свободы. Если же движение стеснено так, что материальная точка принуждена двигаться *по линии* [а линию всегда можно рассматривать как пересечение каких-либо двух поверхностей: $f_1(x, y, z)=0$ и $f_2(x, y, z)= 0$], то в этом случае материальная точка имеет *одну* степень свободы; зная одну из координат точки, две другие координаты можно вычислить по уравнениям линии.

Ограничения свободы движения могут быть весьма разнообразными. Например, движение может быть стеснено тем, что между некоторыми телами, которые мы рассматриваем как материальные точки, имеются легкие, но жесткие стержни, связывающие эти тела, или же гибкие, но нерастяжимые нити, и т. п. Любые способы ограничения свободы движения в механике называются *связями*.

Примеры некоторых видов связи уже были рассмотрены нами, когда мы говорили о силах инерции, которые всегда приложены к связям (§ 17). Примером связи, побуждающей материальную точку двигаться по поверхности, может служить шарнирный подвес мас-