В частном случае, когда имеется одно какое-либо тело, находящееся под действием силы тяжести, можно утверждать, что состоянию устойчивого равновесия будет соответствовать *наинизшее положение центра тяжести тела*; в противном случае потенциальная энергия тяжести не была бы минимальной.

§ 24. Число степеней свободы и работа сил связи. Принцип возможных перемещений

Числом степеней свободы системы называют число *независимых* механических *движений*, которые одновременно может испытывать механическая система. Иначе говоря, числом степеней свободы называют число *независимых координат*, определяющих положение механической системы (т. е. положение всех ее материальных точек).

Положение одной материальной точки определяется тремя координатами x, y, z; если механическая система состоит из n материальных точек, то нужно знать $3n$ координат этих точек, чтобы иметь точное представление о положении механической системы в пространстве. Однако весьма часто движение материальных точек бывает стеснено теми или иными условиями, вследствие чего не все координаты являются независимыми; зная часть координат, другие можно определить из условий, ограничивающих свободу движения материальных точек.

Материальная точка, движение которой *не* стеснено никакими условиями, имеет, очевидно, *три* степени свободы. Если движение материальной точки ограничено так, что точка может перемещаться только по некоторой поверхности $f(x, y, z) = 0$, то достаточно знать две координаты точки, чтобы третью координату можно было вычислить; следовательно, материальная точка, принужденная двигаться *по поверхности*, имеет *две* степени свободы. Если же движение стеснено так, что материальная точка принуждена двигаться *по линии* [а линию всегда можно рассматривать как пересечение каких-либо двух поверхностей: $f_1(x, y, z)=0$ и $f_2(x, y, z)= 0$], то в этом случае материальная точка имеет *одну* степень свободы; зная одну из координат точки, две другие координаты можно вычислить по уравнениям линии.

Ограничения свободы движения могут быть весьма разнообразными. Например, движение может быть стеснено тем, что между некоторыми телами, которые мы рассматриваем как материальные точки, имеются легкие, но жесткие стержни, связывающие эти тела, или же гибкие, но нерастяжимые нити, и т. п. Любые способы ограничения свободы движения в механике называются *связями*.

Примеры некоторых видов связи уже были рассмотрены нами, когда мы говорили о силах инерции, которые всегда приложены к связям (§ 17). Примером связи, побуждающей материальную точку двигаться по поверхности, может служить шарнирный подвес массивного шара на легком жестком стержне (рис. 35): такой маятник может качаться в любой плоскости, причем центр массы маятника будет двигаться по поверхности сферы. Тот же шар, будучи подвешен на двух жестких стержнях, может совершать качания только в одной плоскости; центр массы шара будет двигаться по линии, т. е. сохранится одна степень свободы.

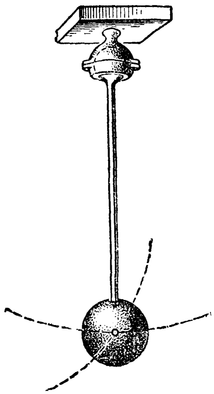
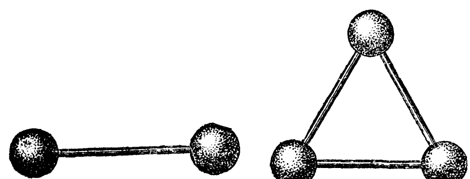


Рис. 35. Движение материальной точки по поверхности: две степени свободы.

Подсчитаем, каково число степеней свободы у двух материальных точек, связанных весьма легким, но жестким стержнем (рис. 36, *а*). Если одну из этих точек мы закрепим, то тем самым мы отнимем у системы три степени свободы; другая материальная точка может при этом двигаться по поверхности сферы, т. е. остаются еще две степени свободы. Следовательно, *две материальные точки, связанные жестким стержнем, имеют пять степеней свободы.*

Пусть система состоит из трех материальных точек, связанных друг с другом тремя жесткими стержнями (рис. 36, *б*). Закрепив одну из материальных точек, мы отнимаем у системы три степени свободы; закрепив вторую точку, отнимаем еще две степени свободы; третья материальная точка может при этом двигаться по окружности вокруг стержня, связывающего первые две точки, т. е. остается еще одна степень свободы. Число степеней свободы будет $3+2+1=6$. Если система состоит из четырех или еще большего числа материальных точек, которые все попарно связаны друг с другом жесткими стержнями, то, когда закреплены первые три не лежащие на одной прямой точки, никакое движение других материальных точек уже не является возможным. Итак, *три или большее число материальных точек, связанных друг с другом жесткими стержнями, имеют шесть степеней свободы.* Силы, приложенные к материальным точкам вследствие существования связей, мы будем называть *реакциями связей* или просто *силами связи.*



а) *б)*

Рис. 36. *а* — система с пятью степенями свободы движения, *б* — система с шестью степенями свободы движения.

В предыдущем изложении мы не выделяли сил связи из других сил. Силы, передаваемые и развиваемые связями, часто являются внутренними силами системы. Однако, когда движение системы ограничено внешними телами, то реакции таких связей мы должны рассматривать как внешние силы. Например, для маятника, изображенного на рис. 35, реакции связей будут внешними силами. Для поезда реакции рельсов также будут внешними силами, тогда как реакции сцепки вагонов и буферов — внутренними силами.

Силы связи выделены в особую категорию не по каким-либо принципиальным соображениям, но вследствие желания упростить решение задач. Даже в сравнительно простых системах вычисление сил связи часто представляет значительные трудности. Вместе с тем силы связи только ограничивают свободу движения системы, но в отличие от других сил не оказывают глубокого влияния на движение системы, а именно, мы убедимся сейчас, что *суммарная работа сил связи равна нулю.* Поэтому во многих случаях можно полностью исследовать движение механической системы, не затрачивая времени на вычисление сил связей.

Силы связи, и внутренние и внешние, непосредственно не могут изменить ни кинетическую, ни потенциальную энергию системы. На взаимопревращаемость кинетической и потенциальной энергий силы связи могут влиять только косвенно, создавая ограничения движению (так, например, если бы массивный шар маятника, изображенного на рис. 35, не был подвешен на стержне, то шар упал бы и его потенциальная энергия тяжести стала бы превращаться в кинетическую; реакция стержня удерживает шар от падения и единственно возможным для маятника движением делает качание).

Для доказательства, что суммарная работа сил связи равна нулю, рассуждаем следующим образом. Пусть имеется какая угодно механическая система, свобода движения которой ограничена некоторыми связями. Вообразим, что на материальные точки системы не действуют никакие силы, кроме сил связей. Дадим материальным точкам системы толчок в любом направлении и предоставим им двигаться по инерции и под действием сил связей. Наша материальная система представляет собой механизм, который, по условию, не обладает потенциальной энергией и в котором ввиду отсутствия каких бы то ни было сил, кроме сил связи, кинетическая энергия не может превращаться в другие виды энергии. Следовательно, кинетическая энергия такого механизма, по закону сохранения энергии, должна оставаться неизменной. Но если бы суммарная работа сил связи не была равна нулю, то кинетическая энергия должна была бы измениться на величину этой работы. Следовательно, суммарная работа сил связи равна нулю, каково бы ни было движение материальных точек, допускаемое связями. Это приводит нас к формуле

$$\sum (R_{xi}\,\delta x_i + R_{yi}\,\delta y_i + R_{zi}\,\delta z_i) = 0. \qquad (6)$$

Здесь R_{xi}, R_{yi}, R_{zi} — компоненты силы, с которой связи действуют на i-ю материальную точку; величины δx_i, δy_i, δz_i представляют собой бесконечно малые изменения координат i-й материальной точки при каком-либо совместимом со связями перемещении этой точки (через δs принято обозначать любое *возможное*, или, что то же, *виртуальное* перемещение, в отличие от ds, означающего фактически происходящее перемещение).

Приведенное выше обоснование формулы (6) ясно показывает, что эта формула справедлива постольку, поскольку реализация связей может считаться идеальной; например, в стержнях и в нитях, реализующих связи, не должно происходить «рассеяние» механической энергии, т. е. превращение ее в энергию упругих деформаций и в энергию молекулярно-теплового движения.

Теорема о равенстве нулю суммарной работы сил связей вносит значительные упрощения в методы решения задач статики и динамики.

Имеются различные приемы изложения вопросов статики, но несомненно, что самый общий и вместе с тем простейший метод решения задач статики заключается в применении принципа возможных перемещений. Этот метод применялся еще Галилеем; его значение понял и оценил Иоганн Бернулли (1717 г.), но полное развитие этот метод получил позднее благодаря работам Лагранжа (1788 г.). В самом общем виде принцип возможных перемещений был установлен и развит в своих применениях в середине прошлого столетия замечательным русским математиком и механиком Михаилом Васильевичем Остроградским.

Как уже было сказано в предыдущем параграфе, *возможным перемещением* называют такое *бесконечно малое перемещение* тела или материальной точки, которое допускается *связями системы*, т. е. существующими ограничениями свободы передвижения тел, образующих систему. Так, например, по условию задачи может быть задано, что тело при своем перемещении должно оставаться на некоторой поверхности; стало быть, возможным перемещением в этом случае является перемещение по этой поверхности. Вообще под возможными перемещениями понимают только те перемещения, которые не противоречат условиям рассматриваемой задачи; при этом имеют в виду перемещения бесконечно малые.

Принцип возможных перемещений заключается в следующем: *Необходимое и достаточное условие равновесия состоит в том, что сумма работ всех сил, приложенных к телам системы, для каждого возможного перемещения системы должна быть равна нулю или меньше нуля.*

Для перемещений, допускаемых «удерживающими» (двусторонними) связями, сумма работ должна быть равна нулю; для перемещений, допускаемых «неудерживающими» (односторонними) связями, сумма работ должна быть меньше нуля или равна нулю. Примером односторонних связей может служить тело, лежащее на какой-либо поверхности.

Когда тела, образующие систему, связаны какими-либо совершенно жесткими стержнями или натянутыми нерастяжимыми нитями, то, применяя принцип возможных перемещений, нет надобности рассматривать «силы связей» (давления и натяжения, передаваемые связями, и реакции связей), так как, как было доказано в предыдущем параграфе, суммарная работа этих сил при всяком перемещении всегда будет равна нулю. Это право игнорирования сил жестких (недеформируемых) связей крайне упрощает решение многих задач статики, позволяя при применении принципа возможных перемещений ограничиваться рассмотрением одних только внешних сил и силы трения.

Отбрасывая работу сил связи, которая в сумме для всех материальных точек равна нулю, и сохраняя для компонентов приложенных сил прежние обозначения X, Y, Z, принцип возможных перемещений аналитически можно выразить следующей формулой:

$$\sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \leqslant 0. \tag{7}$$

Здесь, как было отмечено выше, знак равенства относится к случаю «удерживающих» (двусторонних) связей, тогда как для «неудерживающих» (односторонних) связей наряду со знаком равенства может иметь место и знак неравенства.

Уравнение (7) является наиболее общим уравнением равновесия.

Принцип возможных перемещений можно рассматривать как следствие закона сохранения энергии. Действительно, если в начальный момент все тела системы были неподвижны, а в последующее время они пришли в движение, то это означает, что приложенные к телам силы произвели работу, равную возникшей кинетической энергии. Кинетическая энергия не может возникнуть, и следовательно, система будет пребывать в равновесии, если для всякого возможного перемещения работа всех приложенных к телам сил (внешних и внутренних) равна нулю или меньше нуля.

Принцип возможных перемещений был установлен задолго до того, как был открыт и общепризнан закон сохранения энергии; поэтому в свое время был предложен ряд доказательств справедливости этого принципа, подчиняющих этот принцип другим, подтвержденным на опыте утверждениям.

В дальнейшем мы применим принцип возможных перемещений к расчету условий равновесия некоторых простейших механизмов.

§ 25. Принцип Даламбера и релятивистское понимание инерции

Как показал Даламбер, для решения задач динамики искусственно можно воспользоваться методами статики. Такое упрощение задач динамики достигается тем, что наряду с *фактически* действующими в системе силами рассматривают некоторые *фиктивные*, т. е. несуществующие, воображаемые силы. Это делается следующим образом.