тяготения имеет всеобщую приложимость. Свое обобщение законов Кеплера в законе тяготения Ньютон испытал, вычислив движение комет и движение Луны вокруг Земли, осложняемое воздействием Солнца на Луну [1]).

§ 29. Ньютонов закон тяготения

Ньютонов закон всемирного тяготения состоит в следующем: *Между всякими двумя материальными частицами действует сила взаимного тяготения, прямо пропорциональная массам обеих частиц* (иначе говоря, пропорциональная произведению этих масс) *и обратно пропорциональная квадрату расстояния между этими частицами*. Так, если m и m' — массы двух частиц, находящихся на расстоянии r друг от друга, то сила их взаимного тяготения F выражается формулой

$$F=f\frac{mm'}{r^2}, \tag{1}$$

где f есть постоянная величина, зависящая по числовому значению от выбора единиц, в которых выражаются величины, входящие в формулу. Величина f носит название *гравитационной* [2]) *постоянной*. Если массы m и m' измерены в граммах, а расстояние r — в сантиметрах, то $f=6{,}67\cdot10^{-8}$ (1 *г* массы притягивает 1 *г* массы на расстоянии 1 *см* с силой $6{,}67\cdot10^{-8}$ дин). Гравитационная постоянная f

---

[1]) Если бы планеты двигались по окружностям, а не по эллипсам, то из одного третьего закона Кеплера сразу можно было бы заключить, что планеты тяготеют к Солнцу обратно пропорционально квадрату расстояния от Солнца. Действительно, обозначая радиусы орбит двух планет через r_1 и r_2, окружные скорости планет через v_1 и v_2, центростремительные ускорения через j_1 и j_2, времена обращения через T_1 и T_2, центростремительные силы через F_1 и F_2, имеем:

$$v_1=\frac{2\pi r_1}{T_1}, \qquad j_1=\frac{v_1^2}{r_1}=\frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}$$

и аналогичные соотношения для v_2 и j_2. Следовательно,

$$\frac{j_1}{j_2}=\frac{\left(\frac{F_1}{m_1}\right)}{\left(\frac{F_2}{m_2}\right)}=\frac{r_1}{T_1^2}:\frac{r_2}{T_2^2}=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2\cdot\left(\frac{r_1}{r_2}\right).$$

По третьему закону Кеплера квадраты времен обращения двух планет относятся, как кубы их расстояний: $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$. Стало быть, $\frac{(F_1/m_1)}{(F_2/m_2)}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$, откуда

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{m_1}{r_1^2}:\frac{m_2}{r_2^2}.$$

[2]) От латинского gravitas — **тяжесть**.

была определена опытным путем; каким образом, об этом будет сказано ниже.

Каждая частица камня, лежащего на поверхности Земли, притягивается всеми частицами земного шара. Равнодействующая всех этих сил обусловливает вес камня по отношению к Земле. Точно так же каждая частица Луны притягивается каждой частицей Земли; равнодействующая этих сил представляет собой силу тяготения Луны и Земли. Именно эта сила и удерживает Луну около Земли; если бы эта сила вдруг исчезла, то Луна удалилась бы от Земли, двигаясь по прямой, касательной к ее орбите.

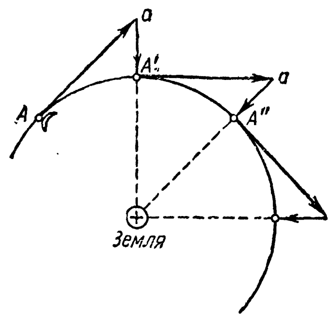

Рис. 45. Луна движется вокруг Земли под действием силы инерции и силы тяготения к Земле.

Движение Луны вокруг Земли можно рассматривать как результат сложения двух независимых движений: 1) движения по инерции, которое должно было бы увлечь Луну по прямой Aa, касательной к ее орбите (рис. 45); 2) «падения» Луны к Земле, вызываемого действием тяготения; за тот промежуток времени, в течение которого Луна, двигаясь по инерции, должна была бы переместиться из точки A в точку a, она вследствие «падения» к Земле приближается к Земле как раз на то расстояние aA', на которое она могла бы за это время удалиться от Земли. В результате Луна проходит путь AA', а в следующий промежуток времени путь $A'A''$ и т. д., т. е. движется (приблизительно) по окружности вокруг Земли.

Точно так же сила тяготения между Землей и Солнцем удерживает Землю на ее орбите при движении Земли вокруг Солнца. То же справедливо и для всех других планет и их спутников. Тяготение между звездами вследствие громадной удаленности звезд друг от друга не столь велико, чтобы легко было обнаружить его влияние на движение звезд.

Сила тяготения между двумя какими-либо телами есть результирующая сил притяжения между всеми попарно взятыми частицами, из которых слагаются эти тела. Вычисление этой результирующей силы иногда представляет собой значительные трудности. В математической физике разработаны способы быстрого решения подобных задач (эти способы основаны на весьма важной для математической физики «теории потенциала» и на применении интегрального исчисления).

В некоторых простых случаях результирующая сила тяготения может быть определена легко. Так, например, оказывается, что два шара (если в каждом из них вещество распределено равномерно) притягивают друг друга так, как если бы вся их масса была сосредоточена в их центрах. Следовательно, в этом случае для вычисления результирующей силы можно воспользоваться формулой (1), подразумевая в ней под m и m' уже не массу отдельных частиц, из которых слагается вещество шаров, но всю массу каждого из шаров и считая, что r означает расстояние между центрами шаров.

Это упрощение расчета не приводит к ошибке также и в том случае, когда вещество шара (или даже обоих шаров) распределено внутри шара с плотностью, неодинаковой для различных расстояний от центра шара, так что шар слагается из ряда концентрических слоев различной плотности; важно только, чтобы в каждом таком концентрическом слое вещество было распределено равномерно. Этому требованию приблизительно удовлетворяет, по-видимому, внутреннее строение Земли, Луны, Солнца, планет. Поэтому силу тяготения между небесными телами можно вычислять, непосредственно используя формулу (1).

Из ньютонова закона тяготения можно вывести кеплеровы законы движения планет.

Следует отметить, что тяготение между планетами весьма мало́ в сравнении с тяготением планет к Солнцу, так как масса Солнца в 750 раз превышает массу всех планет, вместе взятых. Поэтому тяготение между планетами мало влияет на обращение планет вокруг Солнца и, не изменяя общей картины движения планет, сказывается только в некоторых частностях, изучению которых посвящен особый отдел небесной механики, носящий название «теории возмущений».

Законы Кеплера относятся к той системе ориентировки, когда мы считаем неподвижным центр Солнца. В действительности центр Солнца обращается по эллипсу вокруг центра масс солнечной системы. Если считать неподвижным центр масс солнечной системы, то обращение планет тоже происходит по эллипсу, в фокусе которого находится центр масс солнечной системы. Таким образом, кеплеров закон эллиптичности планетных орбит является справедливым и для обращения планет вокруг центра Солнца и для обращения планет вокруг центра масс солнечной системы. Напротив, кеплеров закон площадей справедлив только для движения планет относительно центра Солнца и не является справедливым для обращения планет вокруг центра масс солнечной системы.

Масса и размеры Солнца столь велики, что центр масс солнечной системы удален от центра Солнца на расстояние, всего в 2,15 раза превышающее радиус Солнца (радиус Солнца 695 000 *км*; расстояние центра Солнца от центра масс солнечной системы — около 1 486 000 *км*).

Строгий вывод первого и третьего законов Кеплера из закона тяготения приводится в курсах теоретической физики и небесной механики. При этом обнаруживается, что движение под действием тяготения возможно не только по эллипсу и окружности, но также и по параболе и по гиперболе. Например, некоторые кометы (не принадлежащие к солнечной системе, но временно вовлеченные в нее) описывают вокруг Солнца гиперболу.

Что касается третьего закона Кеплера, то строгий вывод этого закона из закона тяготения показывает, что он не вполне точен, а именно: по третьему закону Кеплера отношение куба большой полуоси орбиты a^3 к квадрату времени обращения T^2 должно было бы быть величиной, одинаковой для всех планет. В действительности это отношение постольку можно считать одинаковым, поскольку является возможным пренебречь массой планеты m в сравнении с массой Солнца M; точное выражение таково:

$$\frac{a^3}{T^2}=f\frac{M}{4\pi^2}\left(1+\frac{m}{M}\right).$$

Чтобы воспользоваться законом тяготения для вычислений, необходимо знать величину гравитационной постоянной f, которая в качестве коэффициента пропорциональности входит в формулу (1). Для этого, очевидно, необходимо хотя бы однажды точно измерить силу тяготения между двумя какими-либо известными массами m и m', например между двумя шарами, удаленными друг от друга на точно измеренное расстояние r; после того как такое измерение произведено, величину гравитационной постоянной легко вычислить по формуле (1), подставив в нее определенные опытным путем значения m, m', r и F.

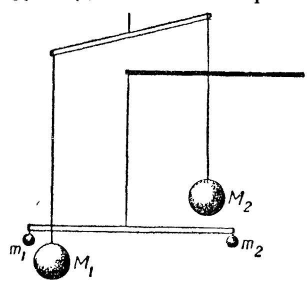

Рис. 46. Крутильные весы Кэвендиша для определения гравитационной постоянной.

Гравитационная постоянная впервые была экспериментально определена в 1798 г. Кэвендишем, который измерил силу тяготения между свинцовыми шарами посредством прибора, носящего название *крутильных весов*; схематически главная часть этого прибора показана на рис. 46. В ящике, установленном на прочном фундаменте и защищенном от колебаний температуры, к вделанной в крышку оси, которую можно было вращать, был прикреплен горизонтальный стержень; к концам этого стержня были привешены два массивных свинцовых шара M_1 и M_2. На концах другого стержня были подвешены еще два небольших свинцовых шарика m_1 и m_2.

Поворачивая ось стержня с тяжелыми шарами, можно было наблюдать, что при приближении тяжелых шаров к легким стержень с легкими шарами поворачивался на некоторый угол навстречу тяжелым шарам. Измерив предварительно сопротивление, которое оказывала закручиванию нить, служившая для подвеса стержня с легкими шарами, Кэвендиш по углу закручивания нити имел возможность вычислить суммарную силу тяготения $2F$ между шарами M_1 и m_1 и между шарами M_2 и m_2. Точное определение расстояния между центрами шаров не представляло труда. Вычисленное Кэвендишем значение гравитационной постоянной только на 1% отличалось от того, которое было получено на основании последующих опытов.

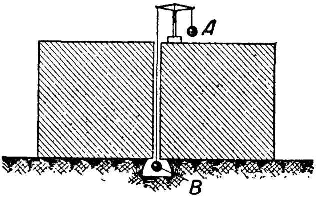

Рис 47. Схема опытов Рихарца по определению гравитационной постоянной.

В 1898 г. Рихарц, по идее Жолли, применил другой способ для вычисления гравитационной постоянной. Схема опытов Рихарца показана на рис. 47. К концам коромысла весов подвешены два шара A и B, которые имеют (если учитывать также и нити, на которых они подвешены) равные массы. Эти шары должны были бы уравновешивать друг друга, но один из них A находится *над* свинцовой плитой в 100 *т*, которая своим притяжением увеличивает вес этого шара, а другой шар B находится *под* свинцовой плитой, которая своим притяжением на ту же величину уменьшает вес этого шара; поэтому коромысло весов отклоняется — шар A перевешивает. По величине отклонения коромысла весов можно судить о силе тяготения между шарами и свинцовой плитой. Этот способ определения гравитационной постоянной считается наиболее точным.

Найдено, что (в единицах CGS) $f=6{,}670\cdot 10^{-8}$.

§ 30. Зависимость веса и ускорения силы тяжести от высоты и географической широты местности

Как известно, вес представляет собой силу, с которой тело давит на опору вследствие тяготения к Земле.

По второму закону механики вес P какого-либо тела связан с ускорением g свободного падения и с массой m этого тела соотношением

$$P=mg. \qquad (2)$$

Вес тела обусловлен результирующей всех сил притяжения между каждой частицей тела и Землей. Поэтому вес всякого тела должен быть пропорционален массе этого тела, как это и есть в действительности. Если пренебречь влиянием суточного вращения Земли, то по ньютонову закону тяготения вес определяется формулой

$$P=f\frac{Mm}{R^2}, \qquad (3)$$

где f — гравитационная постоянная, M — масса Земли, R — расстояние тела от центра Земли. Формула (3) показывает, что вес тела уменьшается по мере удаления от земной поверхности. Средний