В приведенной таблице содержатся основные сведения о девяти больших планетах солнечной системы. Рис. 50 иллюстрирует относительные размеры Солнца и планет.

Кроме перечисленных больших планет, известно около 1300 весьма малых планет, так называемых астероидов (или планетоидов) Их орбиты в основном находятся между орбитами Марса и Юпитера.

§ 32. Потенциальная энергия и потенциал тяготения

Какова бы ни была природа сил взаимодействия (тяготение, электрическое или магнитное взаимодействие), потенциальную энергию взаимодействия тел (или частиц) измеряют как работу, производимую силами взаимодействия при расчленении системы тел (или частиц), т. е. при удалении их на бесконечно большое расстояние друг от друга. Так как при расчленении системы тяготеющих тел силы тяготения не производят работы, но, наоборот, приходится совершать работу против сил тяготения, то очевидно, что потенциальная энергия тяготения представляет собой величину отрицательную.

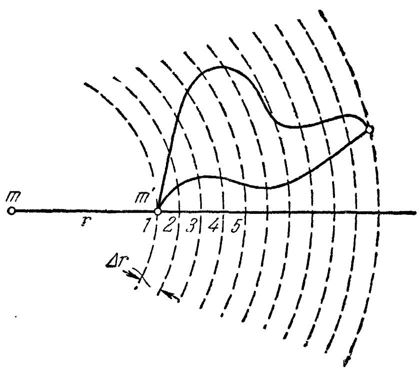

Рис. 51. Работа тяготения не зависит от пути перемещения.

Подсчитаем, чему равна потенциальная энергия взаимодействия двух частиц, массы которых m и m' и которые удалены друг от друга на расстояние r. По закону Ньютона эти частицы тяготеют друг к другу с силой $F=f\frac{mm'}{r^2}$. Мы должны вычислить работу, потребную для удаления частиц на бесконечно большое расстояние друг от друга. Покажем прежде всего, что эта работа не зависит от пути, по которому одну частицу удаляют от другой.

Допустим, что одна из частиц, например m, остается неподвижной; представим себе, что вокруг этой неподвижной частицы как центра проведено бесчисленное множество сфер с радиусами, постепенно возрастающими от r до бесконечности (рис. 51). Какова бы ни была форма траектории, по которой частицу m' удаляют от m, сила тяготения все время остается направленной по радиусу к m. Работа перемещения частицы m' по какой-либо сфере, в центре которой находится m, равна нулю, так как в этом случае сила тяготения перпендикулярна к элементу пути. Работу против тяготения приходится затрачивать только тогда, когда мы переводим частицу m' с одной сферы на другую, имеющую больший радиус.

При всех положениях частицы m' на сфере эта частица притягивается к частице m, находящейся в центре сферы, с одной и той же силой; концентрические сферы всюду удалены друг от друга на одинаковое расстояние; поэтому очевидно, что работа перемещения частицы с одной сферы на другую не зависит от направления радиуса, по которому мы перемещаем частицу m'.

Пусть кратчайшее расстояние между двумя смежными сферами есть Δr; работа перемещения частицы m' с одной сферы на другую по какому-либо радиусу будет равна $F\cdot\Delta r$; если мы перемещаем частицу m' не по радиусу, а под углом α к радиусу, то длина перемещения будет $\frac{\Delta r}{\cos\alpha}$, а сила, действующая в направлении перемещения, будет $F\cdot\cos\alpha$; таким образом, и в этом случае работа перемещения останется равной $F\cdot\Delta r$.

Любую траекторию, по которой удаляют частицу m' от m, можно представить себе состоящей из бесконечно малых перемещений двух родов: из перемещений по сферам и перемещений с одной сферы на другую. Для перемещений первого рода работа равна нулю; для перемещений второго рода она одинакова, в каком бы месте и по какому бы направлению мы ни производили перемещение с одной сферы на смежную.

Отсюда мы заключаем, что, по какой бы траектории мы ни переводили частицу m' из одного положения в другое по отношению к m, работа тяготения (или против тяготения) для всех траекторий будет одинакова.

Указанная работа зависит только от начального и конечного расстояний между частицами и не зависит от пути, по которому частицы из одного расположения перемещаются в другое расположение. Когда частицы сближаются, тяготение производит работу; когда частицы удаляются друг от друга, работа затрачивается против тяготения (работа тяготения отрицательна); если в итоге перемещений частицы возвращены к первоначальной удаленности друг от друга, то работа, произведенная тяготением на одних участках пути (когда частицы сближались), окажется равной работе, затраченной против тяготения на других участках пути (когда частицы удалялись друг от друга); в этом случае суммарная работа тяготения алгебраически равна нулю.

Как было сказано в § 19, силы взаимодействия, работа которых не зависит от пути перемещения, называют *консервативными силами*. Мы видим, что всемирное тяготение является консервативной силой.

Итак, для вычисления потенциальной энергии взаимодействия частиц m и m' мы можем избрать любую траекторию удаления частицы m' в бесконечность. Пусть частица m' удаляется от m в направлении прямой, соединяющей начальные положения этих частиц; очевидно, что потребная для этого работа, т. е. потенциальная энергия со знаком минус, выразится суммой

$$-U=\sum_{r=r_0}^{r=\infty} f\frac{m\cdot m'}{r^2}\Delta r,$$

где r в различных членах суммы имеет постепенно возрастающее значение, соседние члены суммы весьма близки друг к другу и общее число членов (при $\Delta r=dr$) бесконечно велико. Как уже упоминалось (§ 18), суммы такого рода называют интегралом:

$$U=-\int_{r_0}^{\infty} f\frac{m\cdot m'}{r^2}dr.$$

Вышеприведенную сумму можно определить и не прибегая к интегральному исчислению. Работа, затрачиваемая для перемещения частицы m' на малое расстояние $\Delta r=r_2-r_1$ (рис. 51), равна произведению среднего значения силы тяготения на длину перемещения; при указанном перемещении сила тяготения убывает от величины $f\frac{mm'}{r_1^2}$ до величины $f\frac{mm'}{r_2^2}$; в среднем силу тяготения на участке Δr можно принять равной $f\frac{mm'}{r_1r_2}$; следовательно, работу можно записать так:

$$f\frac{mm'}{r_1r_2}(r_2-r_1)=fmm'\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

Аналогично работа, затрачиваемая на малое перемещение r_3-r_2, равна $fmm'\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)$ и т. д. Очевидно, что когда мы возьмем сумму всех этих работ, то все промежуточные члены в этой сумме сократятся; останутся только первый и последний члены; но при $r=\infty$ последний член равен нулю. Таким образом,

$$-U=\sum_{r=r_0}^{r=\infty} f\frac{mm'}{r^2}\Delta r=f\frac{mm'}{r_0},$$

следовательно,

$$U=-f\frac{mm'}{r_0}. \qquad (5)$$

Потенциальная энергия тяготения двух частиц обратно пропорциональна расстоянию между частицами.

Пусть имеется система, состоящая из какого угодно числа частиц. Сила, действующая на любую из этих частиц со стороны остальных, векторно слагается из сил тяготения рассматриваемой частицы ко всем остальным частицам. В данном случае нам удобнее рассматривать не равнодействующую, а отдельные составляющие. Очевидно, что работа, которую нужно затратить, чтобы удалить какую-либо из частиц в бесконечность, равна алгебраической сумме работ, затрачиваемых на преодоление тяготения этой частицы отдельно к каждой из остальных. Следовательно, потенциальная энергия какой-либо частицы m по отношению к системе частиц определяется формулой

$$U = -\sum f \frac{mm_i}{r_i}, \tag{6}$$

где число членов под знаком суммы равно числу остальных частиц системы, m — масса рассматриваемой частицы, для которой мы вычисляем потенциальную энергию, m_i — масса любой другой частицы, r_i — расстояние рассматриваемой частицы от частицы m_i. Величины f и m как общие для всех членов суммы можно вынести за знак суммы; в связи с этим формулу (6) можно переписать так:

$$U = -fm \sum \frac{m_i}{r_i}. \tag{6$'$}$$

Как было упомянуто в § 29, однородные шары притягиваются так, как если бы вся их масса была сосредоточена в центре шара. Поэтому формулы (5) и (6) можно применять для вычисления потенциальной энергии тяготения шарообразных тел; в этом случае r означает расстояние между центрами шаров. В частности, выведенные формулы могут служить для вычисления потенциальной энергии тяготения планет к Солнцу.

Потенциальная энергия какого-либо тела m, расположенного на поверхности Земли, также выражается формулой (5). А именно,

$$U = -f \frac{Mm}{R},$$

где M — масса Земли и R — радиус Земли.

Когда некоторое тело поднимают над поверхностью Земли на высоту h над уровнем моря, то его потенциальная энергия, оставаясь отрицательной, численно убывает (знаменатель в приведенной формуле становится больше: $R+h$ вместо R). Если какая-либо отрицательная величина численно убывает, то это означает, что алгебраически она увеличивается (—2 больше, чем —3). При малых сравнительно с радиусом Земли высотах поднятия прирост потенциальной энергии поднимаемого тела как раз равен, как нетрудно убедиться, произведению веса на высоту поднятия. Действительно,

$$\Delta U = -f \frac{Mm}{R+h} - \left(-f \frac{Mm}{R}\right) = f \frac{Mm}{R} \cdot \frac{h}{R+h};$$

отсюда, если h мало в сравнении с R, то

$$\Delta U \approx f \frac{Mm}{R^2} \cdot h = P \cdot h,$$

где P — вес тела.

Какова причина всемирного тяготения? Этот вопрос до настоящего времени не имеет такого решения, которое можно было бы считать вполне общепринятым.

В физике после Ньютона в продолжение почти полутораста лет[1]) господствовал взгляд на всемирное тяготение как на некую «врожденную силу материи», действующую на расстоянии мгновенно и без участия посредствующей среды. Этот метафизический взгляд, позже всеми оставленный, получил название теории действия на расстоянии. Ньютон не был сторонником такого взгляда. В письме к Бентлею Ньютон писал: «Допускать, что... тело может действовать на другое на расстоянии через пустоту, без посредства чего-нибудь, что передавало бы действие и силу от одного тела к другому, представляется мне столь большой нелепостью, что я не думаю, чтобы человек, компетентный в философском мышлении, мог когда-либо ее сделать».

Несмотря на это, Ньютон, решительно уклонившись от обсуждения причин тяготения, сам дал повод для проникновения в физику идеи о возможности действия на расстоянии. Отдавая дань господствовавшему духу времени, Ньютон в заключении своего труда обратился к рассуждениям о боге и здесь обронил фразу, которая долгое время служила знаменем для всех, кто желал избегнуть обсуждения принципиальных философских вопросов физики: «Причину свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю». Нужно заметить, однако, что Ньютон здесь же поясняет, что он понимает под гипотезой «все, что не выводится из явлений». Теперь гипотезой называют предположения о причинах и сущности явлений, выводимые с той или иной степенью убедительности из наблюдений и экспериментов.

Многие предложенные в разное время гипотезы о причинах тяготения не подтвердились фактами. В 1916 г. А. Эйнштейн дал трактовку тяготения как проявления геометрических свойств самого пространства (эта трактовка тяготения излагается в общей теории относительности в курсах теоретической физики).

Оставляя в стороне вопрос о причинах тяготения и исследуя его проявления, в физике применяют представление о *динамическом поле*. В векторном анализе динамическим полем называют часть пространства, где обнаруживаются те или иные силы взаимодействия. Динамическое поле тяготения иначе называют *гравитационным полем*, или просто *полем тяготения*.

Основными величинами, характеризующими динамическое поле, являются напряженность поля и потенциал. Под *напряженностью* поля тяготения понимают силу, действующую на массу в 1 *г*. При этом, чтобы каждой точке поля можно было приписать определенный вектор напряженности поля, упомянутую массу в 1 *г* следует воображать как «точечную массу», т. е. как массу, занимающую исчезающе малый объем. Напряженность поля тяготения имеет размерность силы, деленной на массу, т. е. размерность ускорения.

Потенциалом динамического поля вообще называют работу, которая может быть получена при перемещении единицы массы (или же единицы заряда в случае электрического поля) из рассматриваемой точки поля в бесконечность, где поля нет. Таким образом, потенциал тяготения V равен потенциальной энергии точечной массы в 1 *г*, помещенной в рассматриваемую точку поля[2]).

---

[1]) До исследований Фарадея, показавших роль среды в электрических взаимодействиях.

[2]) Понятие потенциала было установлено Лагранжем (1777 г.) и применено Грином (1828 г.); термин «потенциал» введен Гауссом (1836 г.). Многие авторы

Очевидно, что потенциал тяготения (как и потенциальная энергия тяготения) всегда отрицателен. Силы тяготения всегда стремятся приблизить какую-либо удаленную массу к массам, образующим поле тяготения, поэтому при перемещении 1 *г* массы из рассматриваемой точки поля в бесконечность нельзя получить работы, но, напротив, для такого перемещения работа должна быть затрачена.

Поскольку потенциал тяготения всегда отрицателен, то ясно, что в какой-либо точке поля потенциал тяготения алгебраически будет тем меньше (а численно, арифметически, тем больше), чем бо́льшую работу нужно затратить, чтобы из данной точки поля, если бы там находился 1 *г* массы, перенести 1 *г* массы в бесконечность, где поля нет. Перемещая какую-либо массу из поля тяготения в бесконечность, мы увеличиваем потенциал этой массы от некоторой отрицательной величины до нуля.

Потенциал тяготения имеет размерность энергии, деленной на массу, т. е. размерность квадрата скорости. Соответственно единицу потенциала тяготения обозначают так: 1 *эрг/г*, или, что то же, 1 *см²/сек²*.

Если в какой-либо точке поля потенциал есть V_1, а в некоторой другой точке V_2, то работа, совершаемая 1 *г* массы при перемещении из первой точки во вторую, очевидно, равна убыли потенциала: $V_1 - V_2$.

Перемещая массу m в направлении убывания потенциала, мы получаем работу A, производимую силами тяготения:

$$A = m(V_1 - V_2). \tag{7}$$

Пусть в какой-либо точке поля потенциал есть V. Очевидно, что масса m', помещенная в эту точку поля, будет иметь потенциальную энергию, во столько раз бо́льшую V, во сколько раз m' больше 1 *г*, т. е. равную произведению потенциала на массу:

$$U = m'V. \tag{8}$$

Сопоставляя это уравнение с уравнением (5), мы видим, что потенциал поля тяготения, образованного точечной массой m, на расстоянии r от этой массы определяется формулой

$$V = -f\frac{m}{r}. \tag{9}$$

По уравнению (6') потенциал поля тяготения, образованного системой как угодно расположенных точечных масс, определяется формулой

$$V = -f\sum\frac{m_i}{r_i}, \tag{10}$$

называют потенциалом тяготения величину, численно определяемую, как указано нами в тексте, но противоположную по знаку. Мы не следуем этой традиции, так как она приводит к несогласованности понятия потенциала тяготения с потенциалом электрического поля.

где число членов под знаком суммы равно числу всех масс, образующих поле тяготения, а r_i есть расстояние от точки поля, для которой вычисляется потенциал, до одной из упомянутых масс.

Поверхность, во всех точках которой потенциал имеет одинаковое значение, называют *поверхностью уровня*, или, иначе, *эквипотенциальной поверхностью*. Очевидно, что в поле тяготения, образованном одной точечной массой, эквипотенциальные поверхности имеют форму концентрических сфер.

Шар, состоящий из однородных по плотности сферических слоев, притягивает внешнее тело так, как если бы вся масса шара была сосредоточена в его центре. Поэтому потенциал силы тяжести на поверхности Земли определяется формулой

$$V=-f\frac{M}{R},$$

где M — масса Земли ($M\approx6\cdot10^{21}$ *т*) и R — радиус Земли ($R=6371$ *км*). Абсолютная величина потенциала силы тяжести указывает работу, которую нужно было бы затратить, чтобы массу в 1 *г* выбросить с поверхности Земли в мировое пространство: $|V|=6394$ *кГм*.

Подсчет показывает [1]), что минимальная скорость, которую необходимо при выстреле сообщить снаряду, чтобы снаряд навсегда покинул Землю, если не учитывать сопротивление воздуха, равна 11,2 *км/сек*. Для преодоления сопротивления воздуха при подобных скоростях движения на каждый грамм массы снаряда потребовалось бы затратить работу в количестве примерно 1700 *кГм*. Таким образом, чтобы выбросить с поверхности Земли в мировое пространство 1 *г* массы, в общей сложности нужно затратить примерно 8000 *кГм*, т. е. такую же работу, как при подъеме на поверхности Земли груза в 8 *т* на высоту в 1 *м*.

---

[1]) Снаряд навсегда покинет Землю, если его кинетическая энергия превысит абсолютную величину его потенциальной энергии тяжести по отношению к Земле:

$$\frac{mv^2}{2}\geqslant f\frac{mM}{R},$$

где R и M — радиус и масса Земли. Введя ускорение силы тяжести $g=f\frac{M}{R^2}$, приведенное соотношение можно переписать так:

$$\frac{mv^2}{2}\geqslant mg\cdot R.$$

Отсюда заключаем, что наименьшая скорость, которую необходимо сообщить снаряду, чтобы он навсегда покинул Землю (если не учитывать сопротивление воздуха), равна

$$v=\sqrt{2gR}=11{,}2\ км/сек.$$