§ 33. Некоторые теоремы о потенциале тяготения

Из определения понятия потенциала ясно, что перемещение внесенной в поле точечной массы по эквипотенциальной поверхности не сопряжено с затратой или получением работы. Отсюда мы заключаем, что *вектор напряженности поля во всех точках поля направлен по нормали к поверхностям уровня* (в противном случае проекция напряженности поля на какое-либо элементарное перемещение по поверхности уровня не была бы равна нулю и, следовательно, работа перемещения по поверхности уровня оказалась бы также не равной нулю).

На рис. 52 показаны расположение поверхностей уровня и направление вектора напряженности поля тяготения, образованного двумя массивными шарами. Следует обратить внимание на то, что картина гравитационного поля сходна с картиной электрического поля одноименных зарядов; но при одинаковой картине поля в электрическом поле происходит отталкивание одноименных зарядов, а в гравитационном поле — притяжение масс.

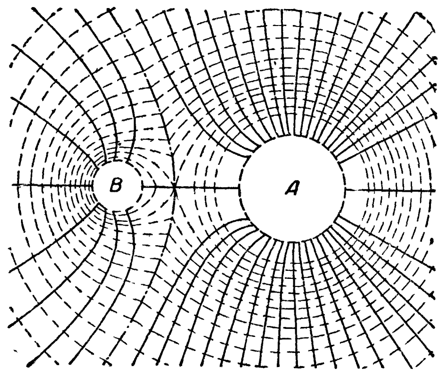

Рис. 52. Поле тяготения двух шаров Пунктиром изображены сечения эквипотенциальных поверхностей, сплошные линии показывают направление напряженности поля. Масса большого шара в четыре раза превышает массу малого.

Зная значение потенциала во всех точках поля тяготения, нетрудно вычислить напряженность поля. Действительно, представим себе, что через интересующую нас точку поля проведена эквипотенциальная поверхность $V_1 = \text{const}$. Проведем рядом вторую эквипотенциальную поверхность $V_2 = V_1 + dV = \text{const}$, где потенциал на бесконечно малую величину меньше ($dV<0$). Пусть от рассматриваемой точки поля эта вторая эквипотенциальная поверхность удалена (по нормали к первой поверхности) на расстояние dl. Напряженность поля есть сила, действующая на точечную массу в 1 *г*, помещенную в рассматриваемую точку поля, а убыль потенциала ($V_1 - V_2$) есть работа, производимая тяготением при перемещении массы в 1 *г*; стало быть,

$$\frac{F}{m}\cdot dl = -dV,$$

или

$$\frac{F}{m} = -\frac{dV}{dl}. \tag{11}$$

Производную от потенциала по длине перемещения (в направлении нормали к поверхности уровня) называют *градиентом* [1] *потенциала*. Градиент потенциала

[1]) Слово «градиент» происходит от латинского gradior — ступаю, иду. Понятие градиента может быть применено к любой величине, зависящей от положения точки в пространстве (говорят, например, о градиенте плотности, если плотность в различных точках тела неодинакова, о градиенте температуры, если тело в различных точках неодинаково нагрето, и т. д.) Под градиентом величины φ подразумевают предел, к которому стремится отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$ при бесконечном убывании Δl, где Δl означает малое перемещение в направлении наибольшего

рассматривают как вектор, направленный в сторону наибольшего возрастания потенциала. Мы видим, что *напряженность поля численно равна градиенту потенциала, но направлена в сторону, противоположную градиенту потенциала*, т. е. в сторону убывания потенциала. Если бы при перемещении по нормали к поверхностям уровня изменение потенциала происходило равномерно, то напряженность поля была бы равна убыли потенциала, приходящейся на 1 *см*.

О напряженности в различных точках поля можно судить по тому, насколько близко расположены друг к другу поверхности уровня, потенциалы которых отличаются на единицу потенциала, т. е. на 1 *эрг/г*. Действительно, положив в формуле (11) $\Delta V = 1$ *эрг/г*, мы видим, что *напряженность поля в различных точках поля обратно пропорциональна удаленности Δl поверхностей уровня, отличающихся на единицу потенциала.*

Когда напряженность поля имеет во всех точках одно и то же направление и одинаковую величину, то такое поле называют *однородным*. Иначе говоря, однородным является такое поле, в котором градиент потенциала всюду имеет одинаковое значение и направление. Близ поверхности Земли поле силы тяжести приближенно можно считать однородным.

Теория поля и теория потенциала подробно излагаются в теоретической физике. Стройное и строгое освещение относящихся сюда вопросов требует широкого применения векторного анализа и интегрального исчисления (интегралы, распространенные по объему, по поверхности, по линии). Некоторые из приводимых ниже теорем теории потенциалов можно вывести, основываясь на одной элементарной математике, но такие доказательства являются искусственными и громоздкими; поэтому мы не воспроизводим здесь этих выводов.

1. Как уже упоминалось в § 29, *однородный по плотности сферический слой, а также однородный по плотности шар образуют поле тяготения, которое во всех внешних точках таково, как если бы вся масса была сосредоточена в центре сферического слоя или в центре шара.*

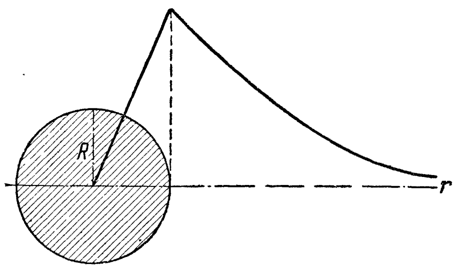

Рис. 53. Величина напряженности поля тяготения на различных расстояниях от центра однородного сплошного шара (масштаб ординаты условен).

2. В полости, окруженной тонким, однородным по плотности сферическим слоем, потенциал всюду одинаков:

$$V = -f\frac{M}{R} = \text{const}, \qquad (12)$$

где M — масса сферического слоя, R — радиус сферического слоя. *Напряженность поля тяготения в полости, окруженной сферическим слоем, равна нулю* (на массу, внесенную внутрь сферического слоя, никакая сила не действует).

3. *Внутри шара* однородной плотности потенциал убывает при перемещении от поверхности шара к центру; на поверхности шара потенциал равен

$$V_{(R)} = -f\frac{M}{R},$$

где M — суммарная масса шара, R — радиус шара. При перемещении в центр

возрастания величины φ, а $\Delta\varphi$ означает наблюдаемое при этом перемещении изменение величины φ; градиент φ по направлению l равен пределу $\left[\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}\right]_{\Delta l \to 0}$. Иными словами, под градиентом понимают *пространственную быстроту изменения величины* (но не быстроту изменения этой величины во времени).

шара потенциал убывает на половину указанной величины, т. е. в центре шара потенциал равен

$$V_{(0)}=-\frac{3}{2}f\frac{M}{R}.$$

В какой-либо точке внутри шара однородной плотности на расстоянии r от его центра потенциал тяготения определяется формулой

$$V_{(r)}=-\frac{3}{2}f\frac{M}{R}\left(1-\frac{r^2}{3R^2}\right). \tag{13}$$

Напряженность поля тяготения внутри шара однородной плотности всюду направлена к центру и определяется формулой

$$\frac{F}{m}=\frac{Mr}{R^3}. \tag{14}$$

Следовательно, *каждая частица шара притягивается к центру шара с силой, пропорциональной расстоянию частицы от центра шара* (рис. 53).

§ 34. Потенциальная энергия системы частиц

Формулы (6) и (10) определяют потенциальную энергию взаимодействия одной из частиц системы с остальными частицами системы. Чтобы вычислить потенциальную энергию системы в целом, нужно подсчитать работу, которая может быть «произведена» [1]) частицами системы при их удалении в бесконечность.

Допустим, что система состоит из двух масс (частиц) m_1 и m_2, расположенных в точках A_1 и A_2, где потенциалы соответственно равны V_1 и V_2, причем потенциал V_2 в точке A_2, где находится масса m_2, вызван массой m_1, а потенциал V_1 — массой m_2. Потенциальную энергию взаимодействия этих двух масс можно подсчитать двумя способами. Мы можем представить себе, что вторая масса остается неподвижной, а первая удаляется от нее. Перемещаясь от места, где потенциал равен V_1, в место, настолько удаленное от второй массы, что потенциал поля там равен нулю, эта первая масса может выполнить работу [2]) m_1V_1. Когда эта первая масса удалится на бесконечно большое расстояние от второй, то очевидно, что теперь становится возможным перемещать вторую массу как угодно, не затрачивая на это перемещение никакой работы. Таким образом, работа m_1V_1, полученная при удалении первой массы, представляет собой потенциальную энергию взаимодействия двух масс: $U=m_1V_1$. Но с таким же правом мы могли бы предполагать, что первая масса остается неподвижной, а удаляется вторая масса. Тогда мы пришли бы к выводу, что $U=m_2V_2$. Следовательно, можно написать:

$$U=\frac{1}{2}(m_1V_1+m_2V_2).$$

Допустим, что система состоит из трех масс (частиц) m_1, m_2 и m_3, расположенных в точках, где потенциалы соответственно равны V_1, V_2, V_3. Пусть массы m_1 и m_2 остаются неподвижными, а масса m_3 удаляется в бесконечность; при этом будет произведена (в алгебраическом смысле) работа m_3V_3; для тех точек

[1]) Мы говорим здесь о «производстве работы» в алгебраическом смысле. Как мы знаем, потенциал тяготения V является величиной отрицательной в соответствии с тем, что при удалении массы из поля тяготения работа не совершается, а, напротив, для удаления массы из поля тяготения работа должна быть затрачена.

[2]) См. предыдущее примечание.