ляют собой совершенно особый, неприводимый к одной силе динамический элемент.

Назовем *плечом* пары кратчайшее расстояние между линиями действия сил, составляющих пару.

Вращательное действие пары всегда определяется произведением силы на плечо. Это произведение называют *моментом пары*. Момент пары рассматривают как вектор, перпендикулярный к плоскости пары и направленный туда, куда нужно смотреть, чтобы видеть силы обращенными в сторону движения часовой стрелки.

Пара сил, действующая на свободное твердое тело, где бы ни были приложены силы, составляющие пару, вращает тело вокруг оси, проходящей через центр массы тела и перпендикулярной к плоскости пары. Действительно, геометрическая сумма сил, составляющих пару, равна нулю, поэтому центр массы тела должен оставаться в покое (стр. 95).

§ 36. Кинетическая энергия вращательного движения. Момент инерции

Кинетическая энергия вращающегося тела равна сумме кинетических энергий всех частиц тела:

$$E_{\text{кин}} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2},$$

где m_i — масса какой-либо частицы, а v_i — ее линейная (окружная) скорость, пропорциональная расстоянию r_i данной частицы от оси вращения. Подставляя в это выражение $v_i = \omega r_i$ и вынося за знак суммы общую для всех частиц угловую скорость ω, находим:

$$E_{\text{кин}} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2.$$

Эту формулу для кинетической энергии вращающегося тела можно привести к виду, аналогичному выражению кинетической энергии поступательного движения, если ввести величину так называемого *момента инерции* тела. Моментом инерции материальной точки называют произведение массы точки на квадрат расстояния ее от оси вращения. Момент инерции I тела есть сумма моментов инерции всех материальных точек тела [1]):

$$I = \sum m_i r_i^2. \qquad (1)$$

[1]) Если вместо конечного числа n материальных точек мы будем иметь сплошное тело, то можно разделить его на элементарные массы dm; тогда сумма конечного числа слагаемых перейдет в сумму бесконечно большого числа их и момент инерции выразится интегралом

$$I = \int r^2\, dm.$$

Итак, кинетическая энергия вращающегося тела определяется такой формулой:

$$E_{\text{кин}} = \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (2)$$

Формула (2) отличается от формулы, определяющей кинетическую энергию тела при поступательном движении, тем, что вместо массы тела m здесь входит момент инерции I и вместо скорости v — угловая скорость ω.

Большой кинетической энергией вращающегося маховика пользуются в технике, чтобы сохранить равномерность хода машины при внезапно меняющейся нагрузке. Вначале, чтобы привести маховик с большим моментом инерции во вращение, от машины требуется затрата значительной работы, но зато при внезапном включении большой нагрузки машина не останавливается и производит работу за счет запаса кинетической энергии маховика.

Особенно массивные маховые колеса применяют в прокатных станах, приводимых в действие электромотором. Вот описание одного из таких колес: «Колесо имеет в диаметре 3,5 *м* и весит 41 *т*. При нормальной скорости 600 об/мин запас кинетической энергии колеса таков, что в момент проката колесо дает стану мощность в 20 000 *л. с.* Трение в подшипниках сведено до минимума смазкой под давлением, и во избежание вредного действия центробежных сил инерции колесо уравновешено так, что груз в 30 *г*, помещенный на окружности колеса, выводит его из состояния покоя».

Приведем (без выполнения вычислений) значения моментов инерции некоторых тел (предполагается, что каждое из этих тел имеет одинаковую во всех своих участках плотность).

Момент инерции тонкого *кольца* относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к его плоскости (рис. 55):

$$I = mr^2. \qquad (3)$$

Момент инерции круглого *диска* (или *цилиндра*) относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к его плоскости (полярный момент инерции диска; рис. 56):

$$I = \frac{1}{2} mr^2. \qquad (4)$$

Момент инерции тонкого круглого диска относительно оси, совпадающей с его диаметром (экваториальный момент инерции диска; рис. 57):

$$I = \frac{1}{4} mr^2. \qquad (5)$$

Момент инерции *шара* относительно оси, проходящей через центр шара:

$$I = \frac{2}{5} mr^2. \qquad (6)$$

6*

Момент инерции *тонкого сферического слоя* радиуса r относительно оси, проходящей через центр:

$$I=\frac{2}{3}mr^2. \tag{7}$$

Момент инерции толстого сферического слоя (*полого шара*, имеющего радиус внешней поверхности R и радиус полости r) относи-

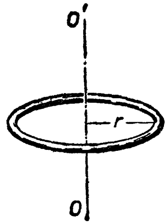

Рис. 55.

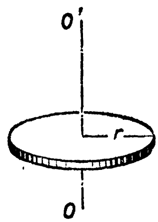

Рис. 56.

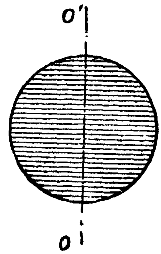

Рис. 57.

тельно оси, проходящей через центр:

$$I=\frac{2}{5}m\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}. \tag{8}$$

Вычисление моментов инерции тел производится при помощи интегрального исчисления. Чтобы дать представление о ходе подобных расчетов, найдем момент инерции *стержня* относительно перпендикулярной к нему оси (рис. 58). Пусть q есть сечение стержня, а ρ — плотность. Выделим элементарно малую часть стержня, имеющую длину dx и находящуюся на расстоянии x от оси вращения. Тогда ее масса $dm=\rho\, q\, dx$. Так как она находится на расстоянии x от оси вращения, то ее момент инерции $dI=q\,\rho x^2\,dx$. Интегрируем в пределах от нуля до l:

$$I=\int_0^l q\rho x^2dx=q\rho\int_0^l x^2dx=q\rho\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^l=\frac{1}{3}q\rho l^3=\frac{1}{3}ml^2.$$

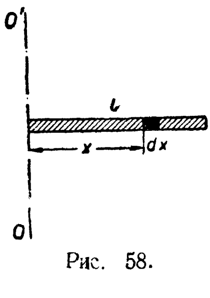

Рис. 58.

Момент инерции *прямоугольного параллелепипеда* относительно оси симметрии (рис. 59)

$$I=\frac{1}{12}m(a^2+b^2). \tag{9}$$

Момент инерции *кольцевого тора* (рис. 60)

$$I=m\left(R^2+\frac{3}{4}r^2\right). \tag{10}$$

Рассмотрим, как связана энергия вращения катящегося (без скольжения) по плоскости тела с энергией поступательного движения этого тела.

Энергия поступательного движения катящегося тела равна $\frac{mv^2}{2}$, где m — масса тела и v — скорость поступательного движения. Пусть ω означает угловую скорость вращения катящегося тела и r — радиус тела. Легко сообразить, что скорость поступательного движения тела, катящегося без скольжения, равна окружной скорости тела в точках соприкосновения тела с плоскостью (за время t, когда тело совершает один оборот, $\omega t=2\pi$, центр тяжести тела перемещается на расстояние $2\pi r$; следовательно, $v=\frac{2\pi\cdot r}{t}=\omega r$).

Таким образом,

$$E_{\text{поступ}}=\frac{m\omega^2r^2}{2}.$$

Энергия вращения

$$E_{\text{вращ}}=\frac{I\omega^2}{2},$$

следовательно,

$$\frac{E_{\text{вращ}}}{E_{\text{поступ}}}=\frac{I}{mr^2}. \qquad (11)$$

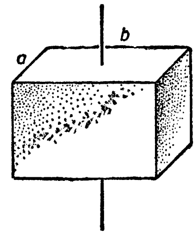

Рис 59.

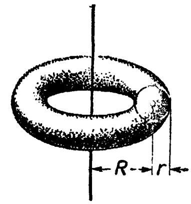

Рис 60.

Подставляя сюда указанные выше значения моментов инерции, находим, что:

а) энергия вращательного движения катящегося обруча равна энергии его поступательного движения;

б) энергия вращения катящегося однородного диска равна половине энергии поступательного движения;

в) энергия вращения катящегося однородного шара составляет $^2/_5$ энергии поступательного движения.

Зависимость момента инерции от положения оси вращения. Пусть стержень AB (рис. 61) с центром тяжести в точке C вращается с угловой скоростью ω вокруг оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа. Положим, что в течение некоторого промежутка времени он переместился из положения AB в $A'B'$, причем центр тяжести описал дугу CC'. Это перемещение стержня можно рассматривать так, как если бы стержень сначала поступательно (т. е. оставаясь себе параллельным) переместился в положение $A''B''$ и затем повернулся вокруг C' в положение $A'B'$. Обозначим OC (расстояние центра тяжести от оси вращения) через a, а угол BOB' через φ. При движении стержня из положения AB в положение $A''B''$ перемещение каждой его частицы одинаково с перемещением центра тяжести, т. е. оно равно CC', или $a\varphi$. Чтобы получить действительное движение стержня, мы можем предположить, что оба указанных движения совершаются одновременно. В соответствии с этим кинетическую энергию стержня, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через O, можно разложить на две части.

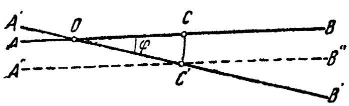

Рис. 61. К выводу соотношения $I=I_c+m(OC)^2$

Первая часть — это кинетическая энергия поступательного движения стержня; все точки стержня имеют при этом одну и ту же скорость; скорость одной точки стержня, а именно точки C, нам известна: она равна $a\omega$, и, следовательно, эта часть кинетической энергии равняется $\frac{1}{2}m(a\omega)^2$, где m — масса стержня. Вторая часть кинетической энергии — это кинетическая энергия вращательного движения стержня с угловой скоростью ω вокруг его центра тяжести C. Она равна $\frac{1}{2}I_c\omega^2$, где I_c — момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести и параллельной оси, проходящей через O. Положим теперь, что I есть момент инерции стержня относительно оси, проходящей через O; рассматривая движение стержня как вращение вокруг оси O, мы можем утверждать, что кинетическая энергия стержня равна $\frac{1}{2}I\omega^2$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}I_c\omega^2+\frac{1}{2}ma^2\omega^2.$$

Отсюда, сокращая все члены уравнения на $\frac{\omega^2}{2}$, находим:

$$I=I_c+ma^2. \qquad (12)$$

Таким образом, *момент инерции относительно любой оси вращения равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр тяжести, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния центра тяжести тела от оси вращения.*

Так, например, момент инерции шара радиусом r и массой m, подвешенного на нити длиной l относительно оси, проходящей через точку подвеса (момент инерции «физического маятника»):

$$I=\frac{2}{5}mr^2+m(l+r)^2.$$

§ 37. Основное уравнение динамики вращательного движения

Пусть к некоторому телу, которое может вращаться около неподвижной оси O и имеет момент инерции I, приложена сила F с плечом r (рис. 62). Определим угловое ускорение $\frac{d\omega}{dt}$, приобретаемое телом под действием указанной силы.

Допустим, что за время dt тело поворачивается с угловой скоростью ω на угол $d\varphi=\omega\,dt$, причем точка приложения силы F описывает дугу $dl=r\,d\varphi$. Работа, совершаемая силой F за время dt, будет равна $F\,dl$, или, иначе, $F\cdot r\omega\,dt$. Эта работа идет на увеличение кинетической энергии вращения тела, т. е.

$$F\,r\,\omega\,dt=d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right).$$