Первая часть — это кинетическая энергия поступательного движения стержня; все точки стержня имеют при этом одну и ту же скорость; скорость одной точки стержня, а именно точки C, нам известна: она равна $a\omega$, и, следовательно, эта часть кинетической энергии равняется $\frac{1}{2}m(a\omega)^2$, где m — масса стержня. Вторая часть кинетической энергии — это кинетическая энергия вращательного движения стержня с угловой скоростью ω вокруг его центра тяжести C. Она равна $\frac{1}{2}I_c\omega^2$, где I_c — момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести и параллельной оси, проходящей через O. Положим теперь, что I есть момент инерции стержня относительно оси, проходящей через O; рассматривая движение стержня как вращение вокруг оси O, мы можем утверждать, что кинетическая энергия стержня равна $\frac{1}{2}I\omega^2$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2.$$

Отсюда, сокращая все члены уравнения на $\frac{\omega^2}{2}$, находим:

$$I = I_c + ma^2. \tag{12}$$

Таким образом, *момент инерции относительно любой оси вращения равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр тяжести, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния центра тяжести тела от оси вращения.*

Так, например, момент инерции шара радиусом r и массой m, подвешенного на нити длиной l относительно оси, проходящей через точку подвеса (момент инерции «физического маятника»):

$$I = \frac{2}{5}mr^2 + m(l+r)^2.$$

§ 37. Основное уравнение динамики вращательного движения

Пусть к некоторому телу, которое может вращаться около неподвижной оси O и имеет момент инерции I, приложена сила F с плечом r (рис. 62). Определим угловое ускорение $\frac{d\omega}{dt}$, приобретаемое телом под действием указанной силы.

Допустим, что за время dt тело поворачивается с угловой скоростью ω на угол $d\varphi = \omega\,dt$, причем точка приложения силы F описывает дугу $dl = r\,d\varphi$. Работа, совершаемая силой F за время dt, будет равна $F\,dl$, или, иначе, $F\cdot r\omega\,dt$. Эта работа идет на увеличение кинетической энергии вращения тела, т. е.

$$F r\omega\,dt = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right).$$

Но при неизменности момента инерции тела

$$d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\omega\, d\omega.$$

Стало быть (произведя сокращение на ω и введя момент силы $M=Fr$), получаем:

$$M = I\frac{d\omega}{dt}. \qquad (13)$$

Мы видим, что это *основное уравнение динамики вращательного движения* по своему начертанию аналогично основному уравнению динамики поступательного движения

$$F = m\frac{dv}{dt}.$$

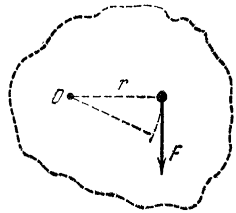

Рис 62

Однако, как и следовало ожидать, в уравнении (13) вместо силы фигурирует момент силы, вместо массы — момент инерции и вместо линейного ускорения — угловое ускорение.

Приняв во внимание возможность изменения момента инерции тела во время вращения, мы вместо уравнения (13) получили бы уравнение

$$M = \frac{d(I\omega)}{dt}, \qquad (14)$$

аналогичное уравнению

$$F = \frac{d(mv)}{dt}.$$

В уравнение (14) входит величина $I\omega$. Выясним ее физический смысл. При вращательном движении тела каждая его частица с массой m описывает окружность некоторого радиуса r, имея при этом некоторую скорость v (рис. 63). Произведение mv есть количество движения данной частицы. Произведение количества движения частицы на кратчайшее расстояние частицы от какой-либо оси, т. е. величина mvr, есть *момент количества движения L относительно оси*. Момент количества движения относительно оси рассматривают как вектор, направленный по оси в ту сторону, куда нужно смотреть, чтобы видеть вращение происходящим по часовой стрелке.

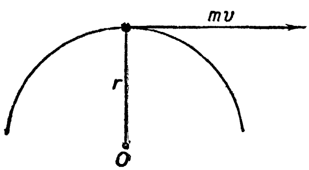

Рис. 63.

Взяв сумму моментов количества движения всех частиц, составляющих вращающееся тело, получим момент количества движения всего данного тела:

$$L = \sum mvr = \sum m\omega rr = \sum m\omega r^2,$$

или, вынося за знак суммы общий для всех точек множитель ω и замечая, что $\sum mr^2$ есть момент инерции I, находим:

$$L = \omega \sum mr^2 = I\omega. \qquad (15)$$

Таким образом, *момент количества движения тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции на угловую скорость.*

Заметим, что момент количества движения вращающегося тела часто называют *импульсом вращения.*

Свободные оси. Основное уравнение динамики вращательного движения справедливо для вращения относительно любой возможной оси. Следует, однако, отметить, что в отношении характера и интенсивности взаимодействия вращающегося тела с опорами оси вращения не все оси равноценны. Возможны два случая: ось вращения такова, что центробежные силы инерции, развиваемые от-

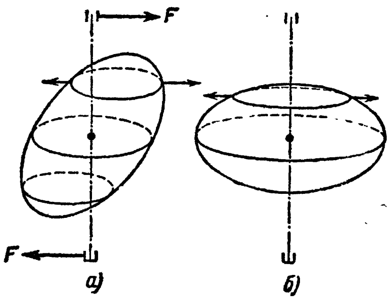

Рис 64 Вращение тела вокруг произвольной (*а*) и свободной (*б*) осей.

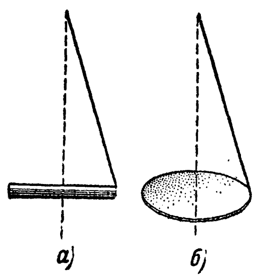

Рис 65 Свободные оси палочки (*а*) и диска (*б*)

дельными материальными точками тела, *не* уравновешиваются относительно этой оси (рис. 64, *а*); тогда тело при вращении оказывает боковое давление на подшипники. Но может случиться, что все центробежные силы инерции у р а в н о в е ш и в а ю т с я относительно оси вращения (рис. 64, *б*); такую ось называют *свободной осью.*

Если тело имеет ось полной симметрии, то, очевидно, эта ось симметрии и будет свободной осью.

Можно доказать, что *во всяком теле существуют три взаимно перпендикулярные свободные оси.*

В отношении устойчивости вращения небезразлично, какая именно из свободных осей служит осью вращения Опыт и теория показывают, что *вращение около осей с наибольшим и наименьшим* *моментом инерции оказывается устойчивым*, а вращение около оси со средним моментом инерции — неустойчивым. Так, если палочку подвесить за конец на нити и другой конец нити привести в быстрое вращение при помощи центробежной машины (рис. 65, *а*), то палочка будет вращаться в горизонтальной плоскости около вертикальной оси, перпендикулярной к длине палочки и проходящей через ее середину. Это и есть свободная ось вращения, причем момент инерции палочки при таком положении оси — максимальный.

Точно так же будет вращаться в горизонтальной плоскости тяжелое кольцо или диск (рис. 65, *б*).

Понятие о свободной оси вращения имеет большое значение для техники. Именно, надо заставлять вращающиеся части машины вращаться около их свободных осей, или, как говорят, надо хорошо их центрировать, иначе давление на ось, особенно при больших скоростях, может иметь вредные последствия вплоть до поломки машины.

§ 38. Закон сохранения момента количества движения

Обратимся к основному уравнению динамики вращательного движения

$$M = \frac{d(I\omega)}{dt} = \frac{dL}{dt}$$

и рассмотрим частный случай, когда на тело либо вовсе не действуют внешние силы, либо они таковы, что их равнодействующая не дает момента относительно оси вращения ($M=0$). Тогда

$$d(I\omega) = M\,dt = 0.$$

Но если изменение величины $I\omega$ равно нулю, то, следовательно, сама величина $I\omega$ остается постоянной:

$$L = I\omega = \text{const}. \qquad (16)$$

Итак, *если на тело не действуют внешние силы* (или результирующий момент их относительно оси вращения равен нулю), *то момент количества движения тела относительно оси вращения остается неизменным*. Этот закон носит название закона сохранения момента количества движения относительно оси вращения

Рис 66. Сальто-мортале.

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих закон сохранения момента количества движения.

Гимнаст во время прыжка через голову (рис. 66) поджимает к туловищу руки и ноги. Этим он уменьшает свой момент инерции,