ГЛАВА X

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 56. Гармоническое колебание

В повседневной жизни и в технике мы постоянно сталкиваемся с колебательным движением: маятник стенных часов совершает периодические качания около отвесного положения, кузов автомашины или вагона качается на мягких рессорах и т. д. Во многих случаях различным колебательным движениям присущ общий признак, заключающийся в существовании некоторого устойчивого положения, в котором колеблющееся тело пребывает до и после колебаний и в котором оно может находиться неопределенно долгое время — до тех пор, пока внешняя сила не выведет его из этого устойчивого состояния. Для маятника таким устойчивым положением является отвесное; для фундамента машины и подвешенного на рессорах вагона — положение, соответствующее некоторой постоянной деформации, обусловленной весом машины или вагона.

Всегда, когда выводят тело из устойчивого положения, возникает сила, стремящаяся возвратить тело в начальное положение. Происхождение этой силы может быть различным. Для маятника — это сила тяжести, для кузова вагона — упругость рессор.

Наличие возвращающей силы является еще недостаточным условием возникновения колебательного движения. В колебательном движении, помимо возвращающей силы, должен участвовать еще и другой фактор, не позволяющий колеблющемуся телу сразу же остановиться в той точке его пути, которая соответствует устойчивому состоянию. Этим фактором является инерция колеблющегося тела.

Колебательное движение имеет особенно простой характер в том случае, когда *возвращающаяся сила возрастает пропорционально смещению* колеблющегося тела из положения равновесия. Сначала мы рассмотрим этот случай чисто кинематически.

Представим себе точку M (рис. 126), движущуюся по кругу радиуса a с постоянной угловой скоростью ω, и рассмотрим движение *проекции* P этой точки на вертикальную ось. Пусть в момент времени t радиус OM повернулся из начального положения OA на угол φ; тогда смещение x точки P, равное отрезку OP, определяется простым выражением:

$$x = a \sin \varphi.$$

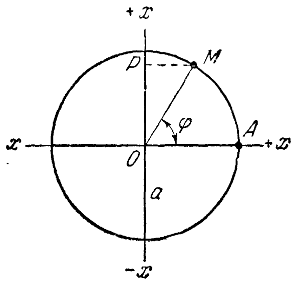

Рис. 126. При равномерном движении точки M по кругу ее проекция P совершает гармоническое колебание.

Угол φ называют *фазой колебания*[1]) точки P; зная угловую скорость[2])

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

(где T — время обхода точкой M полной окружности, а 2π — длина дуги полной окружности в угловых единицах), нетрудно найти фазу φ:

$$\varphi = \omega t = \frac{2\pi}{T} t,$$

и, следовательно,

$$x = a \sin \omega t = a \sin \frac{2\pi}{T} t. \qquad (1)$$

Рассматривая движение проекции точки M на горизонтальную ось, аналогично получаем:

$$x = a \cos \omega t = a \cos \frac{2\pi}{T} t. \qquad (1')$$

Колебательный характер движения, выражаемого уравнениями (1) и (1′), становится особенно очевидным, когда они представлены, как это сделано на рис. 127, графически.

Колебательное движение, выражаемое функцией синуса или косинуса, называют простым гармоническим[3]) *колебанием*; оно полностью характеризуется следующими величинами:

1. Расстоянием (a) наибольшего отклонения от начального положения — *амплитудой*[4]).

2. *Периодом колебания* (T), т. е. временем, в течение которого колеблющаяся точка (или тело) совершает полный цикл колебательного движения, смещаясь сначала в одну, а затем в другую сторону от начального положения и снова возвращаясь к нему.

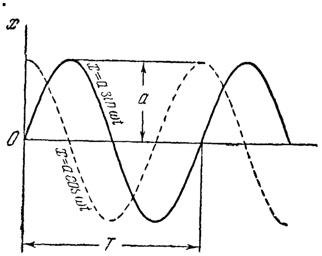

Рис. 127. a — амплитуда гармонического колебания, T — период.

---

1) От греческого phasis — проявление.

2) В последующем (в применении к колебательному движению) мы будем, как это принято, называть величину ω не угловой скоростью, а угловой, или круговой, частотой.

3) От греческого harmoso — приводить в порядок.

4) От латинского amplitudo — широта.

Вместо периода колебания можно задать его *частоту* ν, определяемую *числом полных колебаний, совершаемых в течение* 1 *сек.* Единицу частоты — одно колебание в 1 сек.— называют *герц*. Очевидно, что период и частота являются относительно друг друга обратными величинами:

$$T=\frac{1}{\nu}, \quad \nu=\frac{1}{T}. \tag{2}$$

Угловая частота ω однозначно определяется периодом или частотой:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu. \tag{3}$$

Очевидно, что ω означает *число полных колебаний, совершаемых в течение* 2π *секунд.*

Перейдем к рассмотрению сил, под действием которых может возникнуть простое гармоническое колебание. Для этого, воспользовавшись уравнением (1), найдем сначала скорость v и ускорение j гармонически колеблющейся точки:

$$v=\frac{dx}{dt}=\omega a\cos\omega t, \tag{4}$$

$$j=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 a\sin\omega t=-\omega^2 x. \tag{5}$$

Последнее выражение означает, что в каждый данный момент времени *ускорение* j *пропорционально смещению* x точки из начального положения; знак минус указывает, что ускорение всегда направлено противоположно смещению. Ускорение пропорционально вызывающей его силе и направлено в ту же сторону, что и сила; значит, сила, обусловливающая ускорение колеблющегося тела, направлена тоже в сторону, противоположную смещению, и пропорциональна величине смещения. Очевидно, что эта сила и есть сила, возвращающая точку к положению равновесия.

Умножая обе части уравнения (5) на массу m колеблющейся материальной точки, мы получим *дифференциальное уравнение простого гармонического колебания*:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx, \tag{6}$$

где

$$c=m\omega^2. \tag{6'}$$

Уравнение (6) имеет простой физический смысл: в левой его части стоит произведение массы колеблющейся точки на ее ускорение, чем и определяется согласно второму закону Ньютона действующая на точку возвращающая сила $-cx$. Таким образом, уравнение (6) выражает второй закон механики применительно к случаю материальной точки, связанной с положением равновесия силой, пропорциональной смещению. Обратно, при наличии возвращающей силы, пропорциональной смещению тела, последнее будет совершать простое гармоническое колебание, выражаемое уравнениями (1) или (1′).

Теория гармонических колебаний играет в физике совершенно исключительную по своему значению роль. Учение о гармонических колебаниях используется во всех отделах физики: в теории упругости, в акустике, в оптике, в учении об электричестве, в кинетической теории материи, в теории атома. Чем объясняется эта универсальная применимость учения о гармонических колебаниях?

Исключительная роль учения о гармонических колебаниях объясняется двумя обстоятельствами. Гармоническое колебание — это движение, вызванное силой, возрастающей пропорционально отклонению x от положения равновесия. Какова бы ни была в действительности зависимость силы от x, зависимость эта всегда может быть представлена в виде бесконечного ряда Тейлора; первым членом этого ряда является *квазиупругая сила* (т. е. сила, пропорциональная x), остальные члены ряда пропорциональны последовательно возрастающим степеням x. Если смещение x мало, старшими членами ряда можно пренебречь,— это случай гармонического колебания. При значительных отклонениях от положения равновесия нужно учитывать второй, третий и другие члены ряда (в этом случае колебания *ангармоничны*). По мере роста амплитуды колебательное движение обычно все более и более уклоняется от гармонического колебания. Но и в этом случае каждый раз, когда колеблющаяся система подходит к положению равновесия, поочередно отпадает влияние старших членов ряда Тейлора и близ положения равновесия движение определяется уже одной квазиупругой силой. Поэтому теория гармонических колебательных движений является первым и неизбежным шагом на пути к исследованию почти всех периодических процессов.

Второе обстоятельство, делающее теорию гармонических колебаний весьма важной для различных отделов физики, заключается в том, что многие колебательные системы при внешнем периодическом воздействии на них «отзываются» (резонируют) на гармонические колебания, частота которых близка к частоте собственных колебаний системы (§ 61).

§ 57. Энергия и собственная частота гармонических колебаний

По внешнему виду и по устройству *колебательные системы* (т. е. такие совокупности связанных между собой тел, которые способны к колебательному движению) крайне разнообразны. Рассмотрим простейшую колебательную систему: гирька с массой m подвешена на спиральной довольно жесткой пружине (рис. 128);