случаю материальной точки, связанной с положением равновесия силой, пропорциональной смещению. Обратно, при наличии возвращающей силы, пропорциональной смещению тела, последнее будет совершать простое гармоническое колебание, выражаемое уравнениями (1) или (1').

Теория гармонических колебаний играет в физике совершенно исключительную по своему значению роль. Учение о гармонических колебаниях используется во всех отделах физики: в теории упругости, в акустике, в оптике, в учении об электричестве, в кинетической теории материи, в теории атома. Чем объясняется эта универсальная применимость учения о гармонических колебаниях?

Исключительная роль учения о гармонических колебаниях объясняется двумя обстоятельствами. Гармоническое колебание — это движение, вызванное силой, возрастающей пропорционально отклонению x от положения равновесия. Какова бы ни была в действительности зависимость силы от x, зависимость эта всегда может быть представлена в виде бесконечного ряда Тейлора; первым членом этого ряда является *квазиупругая сила* (т. е. сила, пропорциональная x), остальные члены ряда пропорциональны последовательно возрастающим степеням x. Если смещение x мало, старшими членами ряда можно пренебречь,— это случай гармонического колебания. При значительных отклонениях от положения равновесия нужно учитывать второй, третий и другие члены ряда (в этом случае колебания *ангармоничны*). По мере роста амплитуды колебательное движение обычно все более и более уклоняется от гармонического колебания. Но и в этом случае каждый раз, когда колеблющаяся система подходит к положению равновесия, поочередно отпадает влияние старших членов ряда Тейлора и близ положения равновесия движение определяется уже одной квазиупругой силой. Поэтому теория гармонических колебательных движений является первым и неизбежным шагом на пути к исследованию почти всех периодических процессов.

Второе обстоятельство, делающее теорию гармонических колебаний весьма важной для различных отделов физики, заключается в том, что многие колебательные системы при внешнем периодическом воздействии на них «отзываются» (резонируют) на гармонические колебания, частота которых близка к частоте собственных колебаний системы (§ 61).

§ 57. Энергия и собственная частота гармонических колебаний

По внешнему виду и по устройству *колебательные системы* (т. е. такие совокупности связанных между собой тел, которые способны к колебательному движению) крайне разнообразны. Рассмотрим простейшую колебательную систему: гирька с массой m подвешена на спиральной довольно жесткой пружине (рис. 128);

когда гирька выведена из положения равновесия, пружина действует на нее с силой F, пропорциональной смещению x и направленной в сторону, противоположную x:

$$F = -cx$$

(для упрощения мы пренебрегаем тем небольшим растяжением пружины, которое вызывается весом гирьки). Множитель пропорциональности c, определяющий величину силы, вызывающей смещение, равное единице, носит название *коэффициента возвращающей силы.*

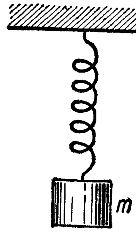

Рис. 128. Простейшая колебательная система.

Будучи выведена из положения равновесия, масса m начнет совершать около этого положения простое гармоническое колебание; если внутреннее трение и сопротивление воздуха отсутствуют, то эти колебания будут продолжаться неопределенно долго. Энергия, сообщенная системе при начальном толчке, будет периодически преобразовываться: потенциальная энергия упруго деформированной пружины будет переходить в кинетическую энергию движущейся гирьки и обратно. По закону сохранения энергии сумма кинетической и потенциальной энергии[1]) будет оставаться постоянной:

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2} + \frac{cx^2}{2} = \text{const}.$$

В момент, когда гирька проходит через положение равновесия ($x = 0$), вся энергия системы есть энергия кинетическая, и скорость имеет максимальное значение $v_{\text{макс}}$; напротив, в любом из крайних положений ($x = \pm a$) энергия системы переходит полностью в потенциальную. Поэтому

$$\varepsilon = \frac{mv^2_{\text{макс}}}{2} = \frac{ca^2}{2}. \tag{7}$$

Но максимальное значение скорости согласно уравнению (4) равно произведению угловой частоты колебания ω на амплитуду a:

$$v_{\text{макс}} = \omega a.$$

Подставляя это в предыдущее уравнение, получим в согласии с уравнением (6′):

$$m\omega^2 = c.$$

[1]) По общей формуле, выведенной в § 41, потенциальная энергия упругого смещения (деформации) равна:

$$\frac{Fx}{2} = \frac{cx^2}{2}.$$

Отсюда определяем угловую частоту:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}, \tag{8}$$

т. е. *угловая частота гармонических колебаний равна корню квадратному из коэффициента возвращающей силы, разделенного на массу тела.*

Легко видеть, что весьма важная формула (8) получается также, если в дифференциальное уравнение колебательного движения $m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx$ подставить $x = a\sin\omega t$ и вторую производную от x по t, т. е. $-\omega^2 a\sin\omega t$, а затем сократить обе части уравнения на $a\sin\omega t$, что дает: $m\omega^2 = c$.

Выражение (8) позволяет найти частоту и период колебания:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \tag{9}$$

Для энергии колебания из выражений (7), (8) и (9) получаются нижеследующие формулы:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} m\omega^2 a^2, \\ \varepsilon &= 2\pi^2 m\nu^2 a^2, \end{aligned} \tag{10}$$

т. е. *энергия гармонического колебания пропорциональна квадрату амплитуды, квадрату частоты и массе колеблющегося тела.*

Рассмотрим в качестве примера простой маятник — небольшое тело массы m, подвешенное на нерастяжимой нити длиной l (рис. 129), причем будем предполагать, что смещения маятника настолько невелики, что их можно отсчитывать по перпендикуляру, опущенному из центра тяжести маятника на прямую, совпадающую с отвесным положением нити.

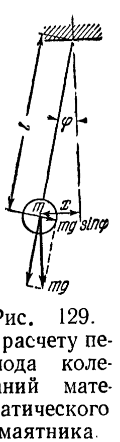

Рис. 129. К расчету периода колебаний математического маятника.

Возвращающей силой будет та слагающая силы тяжести mg (g— ускорение силы тяжести), которая перпендикулярна к нити и направлена к начальному отвесному положению; слагающая, направленная вдоль нити, уравновешивается реакцией нити. Из рис. 129 видно, что интересующая нас слагающая веса маятника равна $mg\sin\varphi$, но так как $\sin\varphi = \frac{x}{l}$, то для возвращающей силы получается выражение $F = -\frac{mg}{l}x$, и, следовательно, коэффициент возвращающей силы равен $\frac{mg}{l}$.

Воспользовавшись общей формулой (9), находим период колебаний маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (11)$$

Формула (11) показывает, что *период колебания маятника не зависит от его массы*. Это обстоятельство может на первый взгляд показаться неожиданным. Однако, если вспомнить, что возвращающая сила, обусловленная весом маятника, пропорциональна его массе, то станет понятным, каким образом величина m исчезает из окончательного результата.

Выше мы рассматривали такие колебания, при которых колеблющееся тело движется по прямой линии. Но уже на примере маятника мы должны были бы, строго говоря, считаться с тем, что в данном случае центр тяжести массы m движется не по прямой, но по дуге круга радиуса l. Только ограничившись малыми колебаниями, мы могли заменить отрезок дуги отрезком прямой и отсчитывать смещения не вдоль дуги, а вдоль перпендикуляра, опущенного на отвесную прямую, проходящую через точку подвеса. При малых размахах маятника связанная с этим ошибка не превышает долей процента.

В целом ряде случаев, хотя бы, например, в случае маятника обычных карманных часов, колеблющееся тело совершает не поступательное, но в р а щ а т е л ь н о е движение. (К числу таких колебаний относятся так называемые «крутильные колебания».) Простейшая система, способная совершать колебания с вращательным движением,— это насаженный на ось диск, скрепленный с пружиной таким образом, что повороту диска препятствует возвращающая сила, обусловленная закручиванием пружины. Пусть I — момент инерции диска относительно оси, а M — момент возвращающей силы, который будем считать пропорциональным углу φ поворота диска: $M = D\varphi$. Для периода колебаний такой колебательной системы справедлива формула

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}, \qquad (12)$$

аналогичная формуле (9), с той разницей, что место массы занял момент инерции, а место коэффициента возвращающей силы — коэффициент возвращающего момента Формула (12) может быть получена путем рассуждений, не отличающихся от тех, с помощью которых была выведена формула (9).

Маятник, для которого верна формула (11), представляет собой точечную массу, подвешенную на невесомой нити. Однако действительный маятник (который мы в отличие от рассмотренного выше «математического» маятника будем называть *физическим маятником*) представляет собой некоторое весомое тело, подвешенное в точке, не совпадающей с центром тяжести. Период колебаний физического маятника может быть найден с помощью формулы (12).

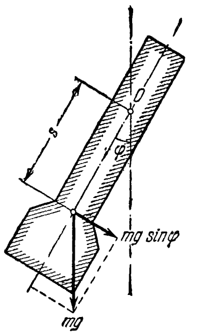

Рис. 130. К расчету периода колебаний физического маятника.

Обозначим по-прежнему через I момент инерции маятника относительно оси его вращения[1]), через D — коэффициент возвращающего момента. Пусть, далее, s означает расстояние центра тяжести тела от оси вращения (рис. 130). Возвращающая сила, возникающая при повороте маятника на угол φ, будет $mg\sin\varphi$, а момент ее $M = mg\sin\varphi\, s$. Если размахи маятника невелики, то можно положить $\sin\varphi = \varphi$, и тогда

$$M = D\varphi = mgs\varphi,$$
$$D = mgs.$$

Воспользовавшись теперь формулой (12), находим:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgs}} = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}, \qquad (13)$$

где $l' = \frac{I}{ms}$. Величину l' принято называть *приведенной длиной физического маятника*. Смысл этого термина заключается в том, что математический маятник, имеющий длину, равную приведенной длине физического маятника, будет иметь тот же самый период.

§ 58. Сложение колебаний одинаковой частоты и одинакового направления (интерференция колебаний)

Материальная точка может одновременно участвовать в нескольких гармонических колебаниях. Смещение точки в какой-либо момент времени определяется при этом геометрической (векторной) суммой смещений, которые точка получает, участвуя в каждом из колебательных движений в отдельности. Результирующее движение точки, одновременно участвующей в нескольких колебаниях, является сложным движением, однако в большинстве практически интересных случаев это результирующее движение также является колебательным. Таким образом, можно говорить о сложении нескольких колебаний в одно результирующее.

---

[1]) Напомним (§ 36), что если I_s есть момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр тяжести, то момент инерции относительно оси вращения O определяется уравнением

$$I = I_s + ms^2,$$

где s есть расстояние центра тяжести от оси вращения.