показывает формула (16), только тогда, когда фазы слагаемых колебаний отличаются на величину $\frac{\pi}{2}$, или на $3\frac{\pi}{2}$, или вообще на величину $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, где n — нуль или какое-либо целое число.

Когда разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ или вообще $(2n+1)\pi$, то говорят, что колебания находятся в *противоположных фазах*. Действительно, в этом случае

$$|a| = |a_1 - a_2|.$$

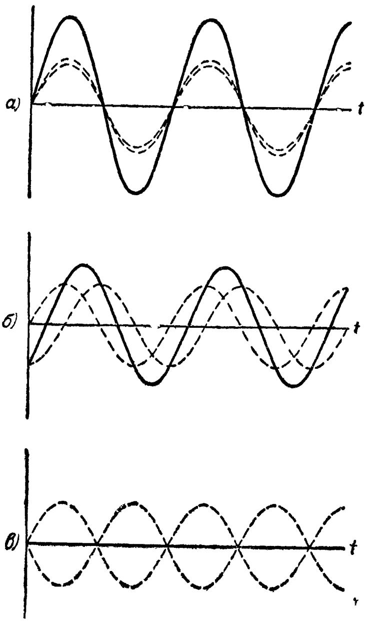

Рис. 132. Интерференция колебаний с одинаковыми амплитудами и с фазами: одинаковыми (*а*), разными (*б*) и противоположными (*в*).

Если фазы слагаемых колебаний противоположны и амплитуды равны ($a_1 = a_2$), то сложение колебаний приводит к покою ($a = 0$).

Когда разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ или вообще $2n\pi$, где n — любое целое число, то говорят, что колебания *совпадают по фазе*. В этом случае из формулы (16) следует, что

$$a = a_1 + a_2.$$

При совпадении фаз и равенстве амплитуд ($a_1 = a_2$) амплитуда результирующего колебания в два раза превышает амплитуду каждого из складываемых колебаний, и, следовательно, энергия результирующего колебания в четыре раза превышает энергию каждого из складываемых колебаний.

На рис. 132 приведены три случая интерференции колебаний с одинаковой амплитудой, но с разными фазами (синусоида результирующего колебания построена посредством алгебраического суммирования ординат слагаемых синусоид).

§ 59. Другие случаи сложения колебаний

Когда складываемые колебания имеют *одинаковое направление, но неодинаковый период*, то результирующее колебание, вообще говоря, *не является гармоническим*.

Чтобы разобраться в том, какое результирующее движение в данном случае будет совершать материальная точка, обратимся снова к векторной диаграмме. Однако теперь вследствие неодинаковости частот слагаемых колебаний векторная диаграмма в том виде, как она изображена на рис. 131, может быть применена только к начальному моменту времени $t = 0$. Желая построить векторную диаграмму для какого-либо другого момента времени, мы должны заменить углы φ_1, φ_2 и φ углами $\omega_1 t + \varphi_1$, $\omega_2 t + \varphi_2$ и $\omega t + \varphi$. Так как в данном случае $\omega_1 \neq \omega_2$, то угол между векторами, изображающими амплитуды слагаемых колебаний, а именно угол $(\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)$, будет представлять собой величину, изменяющуюся со временем. Следовательно, если бы мы пожелали представить результирующее колебание в виде функции

$$x = x_1 + x_2 = a \sin(\omega t + \varphi),$$

то мы должны были бы считать «амплитуду» a и «начальную фазу» φ величинами, изменяющимися со временем (рис. 133). Как изменяются со временем величины a и φ, об этом можно составить себе представление, если вообразить, что векторы a_1 и a_2 вращаются вокруг начала координат с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 (угол между этими векторами будет изменяться со скоростью $\omega_1 - \omega_2$).

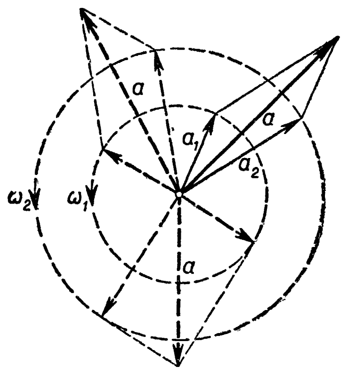

Рис. 133. При сложении двух гармонических колебаний неодинаковой частоты «амплитуда» и «начальная фаза» результирующего колебания изменяются со временем, что указывает на то, что результирующее колебание не является гармоническим.

Весьма важными являются два частных случая: сложение колебаний с кратными периодами и сложение колебаний, периоды которых разнятся весьма мало.

Сложение колебаний с кратными периодами. Всякое колебание характеризуется прежде всего *формой* колебания; под формой колебания подразумевают зависимость между смещением x и временем t, представленную графически, как это сделано, например, на рис. 127 и 132. Нетрудно убедиться в том, что сложение гармонических колебаний (синусоидальных и косинусоидальных) дает результирующее колебание, ф о р м а которого существенно зависит от соотношения периодов и фаз слагаемых колебаний. Простейший способ определения формы результирующего колебания состоит в том, что на графике (x, t) мы алгебраически складываем ординаты кривых, изображающих слагаемые колебания. На рис. 134 утолщенной линией показана форма колебаний, получаемая при сложении двух синусоидальных колебаний, периоды которых относятся, как 1 к 2.

По теореме, доказанной Фурье, *колебание любой формы с периодом T можно представить как сумму гармонических колебаний с периодами T, $T/2$, $T/3$, $T/4$* и т. д. Такое разложение произвольной периодической функции на синусоидальные функции называют *гармоническим анализом*. На рис. 135 показано разложение периодической функции треугольной формы на четыре синусоиды с периодами T, $T/3$, $T/5$ и $T/7$. Зная форму периодической функции

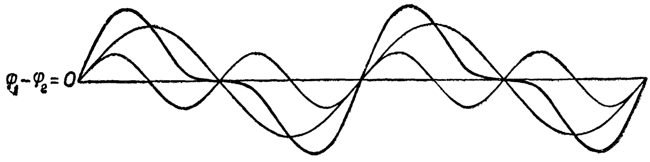

Рис. 134. Форма результирующего колебания при отношении периодов $T_1 : T_2 = 1:2$.

$x = f(t)$, по методу, разработанному Фурье, всегда можно вычислить амплитуды и фазы синусоид, суммированием которых может быть получена данная функция (метод Фурье излагается в курсах анализа).

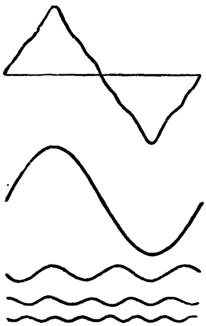

Рис. 135. Разложение треугольной кривой на четыре синусоиды.

Сложение колебаний с близкими периодами (биения). Когда частоты слагаемых колебаний ω_1 и ω_2 мало различаются, то в некоторые промежутки времени колебания оказываются почти совпадающими по фазе и в это время они «усиливают друг друга». В другие промежутки времени колебания оказываются почти противоположными по фазе и тогда они «гасят друг друга». Такие усиления и ослабления результирующего колебания, чередуясь, следуют друг за другом с частотой, равной разности частот слагаемых колебаний. Это явление носит название *биений*. На рис. 136 показано возникновение биений при сложении двух гармонических колебаний одинаковой амплитуды с отношением периодов 7 к 6.

Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний. Участвуя одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебательных движениях одинакового периода, точка совершает результирующее движение по эллиптической траектории. Вид этого эллипса зависит от разности фаз колебаний; в частных случаях эллипс может выродиться в прямую линию (рис. 137).

Если разность фаз равна $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, причем амплитуды колебаний равны друг другу ($a_1=a_2=a$), то результирующее движение происходит по окружности.

Гораздо более сложные траектории получаются в тех случаях, когда периоды складывающихся колебаний неодинаковы. В зависимости от соотношения периодов, амплитуд и начальных фаз складывающихся колебаний траектории результирующего движения принимают вид замысловатых кривых, известных под названием *фигур*

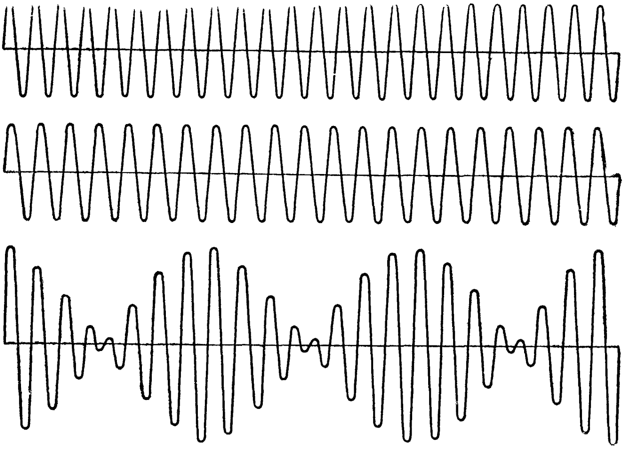

Рис. 136. Биения; нижняя кривая представляет собой результат сложения двух верхних кривых.

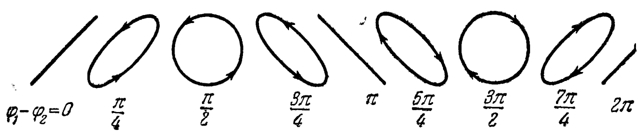

Рис. 137. Влияние разности фаз на результирующую траекторию при сложении взаимно перпендикулярных колебаний одинакового периода и равных амплитуд.

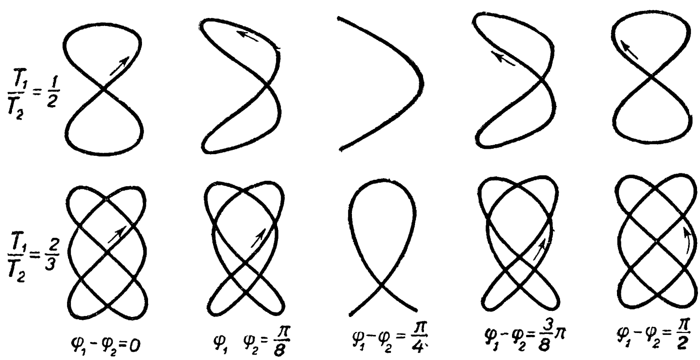

Рис. 138. Фигуры Лиссажу

Лиссажу (в честь изучавшего их французского физика). На рис. 138 показаны некоторые из этих фигур. Лиссажу демонстрировал сложение колебаний посредством светового «зайчика», отраженного от ножек двух колеблющихся камертонов. Этот способ демонстрации сложения колебаний пояснен рисунками 139 и 140 (если бы в случае,

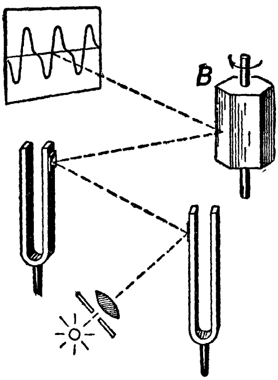

Рис. 139. Демонстрация сложения колебаний одинакового направления.

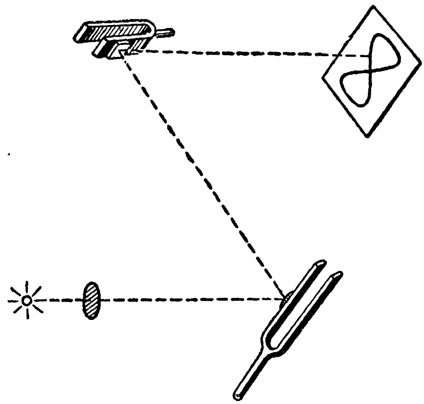

Рис. 140. Демонстрация сложения взаимно перпендикулярных колебаний.

изображенном на рис. 139, мы убрали вращающееся шестигранное зеркало B и на его место поставили экран, то могли бы наблюдать «результирующую траекторию» в виде вертикальной полоски).

§ 60. Затухающие колебания

Вследствие сопротивлений движению колебательная система непрерывно отдает часть энергии среде. Энергия пропорциональна квадрату амплитуды, поэтому при убывании энергии уменьшается и амплитуда колебаний. Очевидно, что закон убывания амплитуды определяется быстротой расхода энергии системой.

Колебательная система может расходовать свою энергию двумя путями: вследствие *трения* и вследствие *излучения*, т. е. отдачи энергии во внешнюю среду в форме волн.

В большинстве случаев налицо имеются оба источника потерь. Затрата энергии на излучение обычно есть полезный расход (назначение целого ряда колебательных систем); отдача энергии вследствие трения является непроизводительной потерей.

Чтобы поддерживать колебания системы длительное время, нужно подводить к ней энергию извне; при этом амплитуда искусственно поддерживаемых колебаний принимает такое значение, при котором приход энергии компенсирует ее расход, и система с точки зрения ее энергетического баланса работает без прибыли и убытка.

В большинстве технически интересных случаев расход энергии обусловлен наличием *сопротивления, величина которого пропор-*