от ножек двух колеблющихся камертонов. Этот способ демонстрации сложения колебаний пояснен рисунками 139 и 140 (если бы в случае,

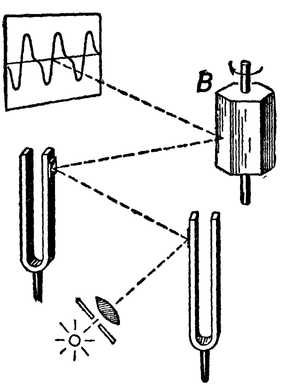

Рис. 139. Демонстрация сложения колебаний одинакового направления.

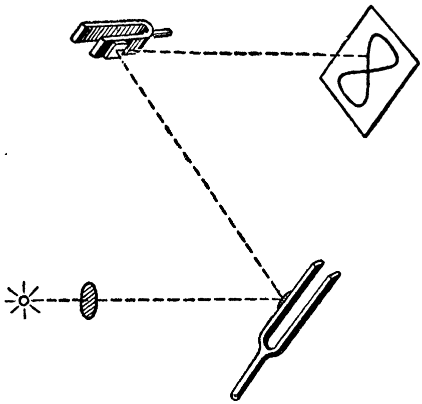

Рис. 140. Демонстрация сложения взаимно перпендикулярных колебаний.

изображенном на рис. 139, мы убрали вращающееся шестигранное зеркало B и на его место поставили экран, то могли бы наблюдать «результирующую траекторию» в виде вертикальной полоски).

§ 60. Затухающие колебания

Вследствие сопротивлений движению колебательная система непрерывно отдает часть энергии среде. Энергия пропорциональна квадрату амплитуды, поэтому при убывании энергии уменьшается и амплитуда колебаний. Очевидно, что закон убывания амплитуды определяется быстротой расхода энергии системой.

Колебательная система может расходовать свою энергию двумя путями: вследствие *трения* и вследствие *излучения,* т. е. отдачи энергии во внешнюю среду в форме волн.

В большинстве случаев налицо имеются оба источника потерь. Затрата энергии на излучение обычно есть полезный расход (назначение целого ряда колебательных систем); отдача энергии вследствие трения является непроизводительной потерей.

Чтобы поддерживать колебания системы длительное время, нужно подводить к ней энергию извне; при этом амплитуда искусственно поддерживаемых колебаний принимает такое значение, при котором приход энергии компенсирует ее расход, и система с точки зрения ее энергетического баланса работает без прибыли и убытка.

В большинстве технически интересных случаев расход энергии обусловлен наличием *сопротивления, величина которого пропор-*

циональна скорости колеблющейся массы: $R = -r\frac{dx}{dt}$, где знак минус означает, что сопротивление R уменьшает скорость движения, а величина $r = \text{const}$ представляет собой *коэффициент сопротивления*. Таково, например, сопротивление вязкого трения, а также и сопротивление излучения, обусловленное реакцией среды, окружающей колебательную систему. При наличии такого сопротивления дифференциальное уравнение колебаний будет иметь более сложный вид, нежели уравнение (6). Очевидно, что в данном случае ускорение колеблющейся точки определяется в каждый момент времени не только возвращающей силой $-cx$, но еще и сопротивлением $-r\frac{dx}{dt}$. Приравняв произведение массы точки на ее ускорение сумме действующих на точку сил, получим дифференциальное уравнение

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -r\frac{dx}{dt} - cx. \qquad (17)$$

Этому уравнению уже не удовлетворяет формула простого гармонического колебания, характеризующегося, как мы знаем, постоянством амплитуды. Напротив, вследствие расхода энергии амплитуда колебаний должна с течением времени убывать. Колебания с убывающей амплитудой называются *затухающими*. Таким образом, уравнение (17) есть дифференциальное уравнение затухающих колебаний.

Формулу затухающих колебаний найдем, сделав предположение, что амплитуда колебаний убывает тем медленнее, чем меньше она становится. Это предположение означает, что скорость изменения амплитуды $\frac{da}{dt}$ пропорциональна величине самой амплитуды, т. е.

$$\frac{da}{dt} = -\alpha a$$

(знак минус показывает, что изменение амплитуды происходит в сторону ее уменьшения). Разделяя переменные, находим:

$$\frac{da}{a} = -\alpha\, dt,$$

или, интегрируя:

$$\ln a = -\alpha t + C.$$

Полагая $C = \ln a_0$, получаем:

$$a = a_0 e^{-\alpha t}.$$

Здесь $e = 2{,}71\ldots$ есть основание натуральных логарифмов, а a_0 — амплитуда в начальный момент времени ($t = 0$). Величина α называется *коэффициентом затухания*. Уравнение затухающего колебательного движения имеет вид

$$x = a_0 e^{-\alpha t} \sin \omega t. \qquad (18)$$

Путем подстановки функции (18) и ее производных по времени в дифференциальное уравнение (17) можно найти значения коэффициента затухания α и угловой частоты ω:

$$\alpha = \frac{r}{2m}, \tag{19}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}. \tag{20}$$

График уравнения (18) показан на рис. 141.

Как видно из формулы (20), частота колебаний при наличии затухания уменьшается. Однако в большинстве практических случаев это уменьшение очень невелико.

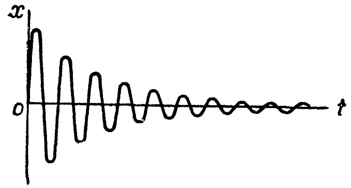

Рис. 141.

Из формулы, выражающей закон убывания амплитуды колебаний, можно убедиться, что отношение амплитуд, отделенных друг от друга интервалом в один период (T), остается постоянным в течение всего процесса затухания. Действительно, амплитуды колебаний, отделенные интервалом в один период, выражаются так:

$$a_1 = a_0 e^{-\alpha t}, \quad a_2 = a_0 e^{-\alpha(t+T)}.$$

Отношение этих амплитуд равно:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_0 e^{-\alpha t}}{a_0 e^{-\alpha(t+T)}} = \frac{1}{e^{-\alpha T}} = e^{\alpha T}.$$

В качестве меры затухания часто берут величину натурального логарифма ϑ этого отношения:

$$\vartheta = \alpha T. \tag{21}$$

Эта безразмерная величина носит название *декремента* затухания.

Часто рассматривают также так называемую *добротность* Q колебательной системы, которую определяют как отношение $\frac{\omega_0}{2\alpha}$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$. При малых декрементах добротность — величина, обратная декременту, а именно $Q \approx \frac{\pi}{\vartheta}$. При больших декрементах соотношение между Q и ϑ получается из (19) и (20):

$$Q^2 = \left(\frac{\pi}{\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$