§ 61. Вынужденные колебания. Резонанс

Система, однажды возбужденная начальным толчком и затем предоставленная самой себе, совершает, как мы видели выше, затухающие колебания с некоторой определенной частотой, зависящей только от свойств самой системы: от ее массы, возвращающей силы и сопротивления. Эти колебания называют *свободными*, а их частоту — частотой свободных колебаний. Свободные колебания в случае отсутствия затухания называют *собственными колебаниями*, а их частоту — *собственной частотой*. Так, например, струна рояля, возбужденная при нажатии клавиши ударом молоточка, совершает собственные колебания, издавая при этом звук, который мы называем собственным тоном струны, пренебрегая небольшим затуханием.

Однако в целом ряде случаев дело обстоит иначе: система совершает свои колебания под действием некоторой внешней силы, работа которой периодически возмещает потерю энергии на трение и излучение; при этом частота колебаний зависит, очевидно, не от свойств самой системы, но от частоты изменений силы, под действием которой система совершает свои колебания. В этом случае мы имеем дело уже не со свободными, а с *вынужденными колебаниями*,— с колебаниями, навязанными нашей системе действием внешних сил.

Системой, совершающей вынужденные колебания, является, например, фундамент поршневой машины. Под действием периодических сил, возникающих при прямолинейно-возвратном движении больших масс, фундамент машины дрожит и вибрирует с частотой, которая равна числу оборотов главного вала, иными словами, частоте колебаний поршней. Точно так же мембрана громкоговорителя, связанная с электромагнитным механизмом, совершает вынужденные колебания с частотой, определяющейся числом периодов переменного тока, пропускаемого через катушку электромагнита.

Приложенная к системе внешняя периодическая сила выполняет двоякого рода задачу: с одной стороны, она должна раскачать систему, сообщить ей известный запас энергии; с другой стороны, работа этой силы пополняет расходуемую энергию, поддерживая, таким образом, колебательное движение.

Система, управляемая внешней силой, совершает свои колебания с той частотой, с которой эта внешняя сила действует. Однако вынужденные колебания с навязанной частотой устанавливаются не сразу. В первый момент система получает некоторый толчок (или начальное отклонение), который заставляет систему совершать, помимо вынужденных, еще и свободные колебания. Таким образом, по крайней мере в начальной стадии процесса система совершает свободные колебания, на которые накладываются колебания вынужденные. Если множитель затухания невелик, то частота свободных колебаний ω_0 может быть рассчитана по формуле (8):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

и уравнение свободных колебаний будет иметь вид

$$x_1 = a_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t.$$

Предположим, что внешняя сила меняется во времени по закону синуса с угловой частотой ω:

$$P = P_0 \sin \omega t;$$

тогда уравнение вынужденных колебаний будет:

$$x_2 = A \sin(\omega t - \psi). \tag{22}$$

Величина ψ указывает на то, что *колебания системы будут следовать за колебаниями силы с некоторым запозданием*, т. е. между ними будет существовать разность фаз ψ. Так как с течением времени амплитуда свободных колебаний убывает, то через некоторый непродолжительный промежуток времени (называемый периодом установления режима) свободные колебания практически прекратятся вовсе и останутся лишь колебания вынужденные, определяемые уравнением (22).

От чего зависит амплитуда A вынужденных колебаний? Почему колебательное движение отстает по фазе от вызывающей его силы и как велика разность фаз ψ?

Чтобы ответить на эти вопросы, присмотримся ближе к возникновению колебательного движения под действием периодической вынуждающей силы

Пусть в начальный момент времени колебательная система находится в покое и вынуждающая сила P равна нулю. С этого момента сила начинает действовать, совершая положительную работу и отводя колеблющуюся массу все дальше и дальше от устойчивого положения. По прошествии некоторого промежутка времени, равного четверти периода изменения силы, смещение и приложенная к системе внешняя сила достигают максимума. Теперь внешняя сила начинает убывать по величине; в то же время возвращающая сила тянет массу назад к устойчивому положению. Если бы внешней силы не было, то через промежуток времени, равный четверти собственного периода системы, масса вновь возвратилась бы к начальному положению. Но в действительности сила, хотя и убывая, продолжает действовать, только теперь она тормозит движение массы, т. е. совершает отрицательную работу. При этом движение колеблющейся массы замедляется, колебания системы начинают отставать от колебаний силы, или, иначе говоря, *сила опережает* смещение.

Обратимся теперь к одному весьма замечательному частному случаю: допустим, что *частота изменений силы* ω *совпадает с собственной частотой системы* ω_0, причем в некоторый момент времени сила опережает смещение как раз на четверть периода. Для конкретизации наших рассуждений предположим, что колебательное движение происходит вдоль горизонтальной линии и что в рассматриваемый момент времени колеблющаяся масса находится в крайнем левом положении. Если *сила опережает смещение на четверть периода*, то в этот момент она только что прошла через нуль и действует вправо, толкая массу к устойчивому положению и способствуя возвращающей силе. При прохождении массы через нулевое положение внешняя сила достигает максимума и затем начинает убывать по величине, сохраняя, однако, свое направление и, значит, способствуя дальнейшему движению массы в крайнее правое положение. Когда масса дойдет до этого крайнего положения, тогда сила вновь обратится в нуль, а затем, способствуя возвращающей силе, начнет толкать массу обратно. Поскольку частоты ω и ω_0 совпадают, постольку опережение на четверть периода, однажды установившись, будет существовать и дальше, значит, работа внешней силы в рассматриваемом случае будет всегда положительной. Следовательно, в этом случае приток энергии к системе будет максимальным, и, стало быть, амплитуда колебаний примет наибольшее возможное для нее при данных условиях значение. Этот случай носит название *резонанса*[1]); условием резонанса является, очевидно, совпадение собственной и навязанной частот.

Если частоты ω и ω_0 не совпадают, то в некоторой части периода вынужденных колебаний работа силы будет отрицательной; следовательно, система будет снабжаться энергией в меньшем количестве и амплитуда колебаний соответственно уменьшится. При этом сила будет опережать смещение уже не на четверть периода, а на какую-то иную величину, либо бóльшую, либо меньшую четверти периода силы.

Конечно, каково бы ни было соотношение между собственной частотой и навязанной, возрастание амплитуды колебаний ограничено тем, что при увеличении ее увеличивается и скорость колебательного движения; с увеличением скорости растет и сопротивление (R), а значит, с возрастанием амплитуды колебательная система начинает интенсивнее расходовать энергию. Таким образом, амплитуда совершенно автоматически принимает каждый раз такое значение, при котором прибыль энергии как раз компенсирует ее расход на трение или излучение.

Теперь математически определим величину амплитуды вынужденных колебаний.

---

[1]) От латинского resone — о т к л и к а ю с ь.

Для простоты предположим сначала, что *затухание отсутствует* ($\alpha = 0$). Тогда на систему действуют две силы: возвращающая сила $F = -cx$, внешняя сила $P = P_0 \sin \omega t$.

Приравнивая сумму этих сил произведению колеблющейся массы на ее ускорение, которое, как это вытекает из двукратного дифференцирования функции (22), равно $-\omega^2 x$, получаем уравнение

$$-m\omega^2 x = P_0 \sin \omega t - cx,$$

откуда

$$x = \frac{P_0}{c - m\omega^2} \sin \omega t,$$

или, разделив числитель и знаменатель на m:

$$x = \frac{\frac{P_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \tag{23}$$

$\left(\text{так как } \frac{c}{m} = \omega_0^2\right)$. Выражение (23) показывает, что амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{\frac{P_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{23'}$$

зависит от разности собственной и вынужденной частот; если ω приближается к ω_0, то амплитуда безгранично возрастает, так как при отсутствии затухания энергия системы в случае резонанса ($\omega = \omega_0$) непрерывно возрастает. Само собой понятно, что практически амплитуда не может безгранично увеличиваться, ибо всякая реальная колебательная система всегда имеет некоторое затухание.

Аналогичный расчет, произведенный *с учетом затухания, пропорционального скорости*, приводит к несколько более сложному выражению для амплитуды вынужденных колебаний, из которого формула (23′) получается как частный случай:

$$A = \frac{\frac{P_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}. \tag{24}$$

При резонансе амплитуда вынужденных колебаний достигает наибольшей величины. Стало быть, резонанс наступает при той частоте колебаний вынуждающей силы (при $\omega = \omega_{рез}$), для которой знаменатель формулы (24) минимален. Для вычисления этой резонансной частоты приравниваем нулю производную от выражения, стоящего под знаком радикала в знаменателе формулы (24); получаем:

$$2(\omega_0^2 - \omega_{рез}^2) \cdot 2\omega_{рез} + 8\alpha^2\omega_{рез} = 0$$

или

$$-(\omega_0^2-\omega_{рез}^2)+2\alpha^2=0,$$

откуда

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\alpha^2}, \qquad (24')$$

тогда как частота с в о б о д н ы х колебаний по формулам (19) и (20)

$$\omega_{своб}=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}.$$

Мы видим, таким образом, что *при наличии затухания резонанс наступает при такой частоте вынужденных колебаний, которая меньше собственной частоты и частоты свободных колебаний*. Разности между этими тремя частотами тем меньше, чем меньше затухание.

Для определения резонансной амплитуды подставляем значение резонансной частоты по формуле (24') в формулу (24). Это дает:

$$A_{рез}=\frac{\frac{P_0}{m}}{2\alpha\cdot\omega_{своб}}, \qquad (24'')$$

где $\omega_{своб}$ — частота свободных колебаний.

Из рис. 142 видно, каким образом амплитуда вынужденных колебаний зависит от соотношения навязанной и собственной частот; различные кривые на этом рисунке соответствуют различным значениям множителя затухания α. Мы видим, что чем меньше затухание, тем больше увеличивается амплитуда по мере приближения к резонансу.

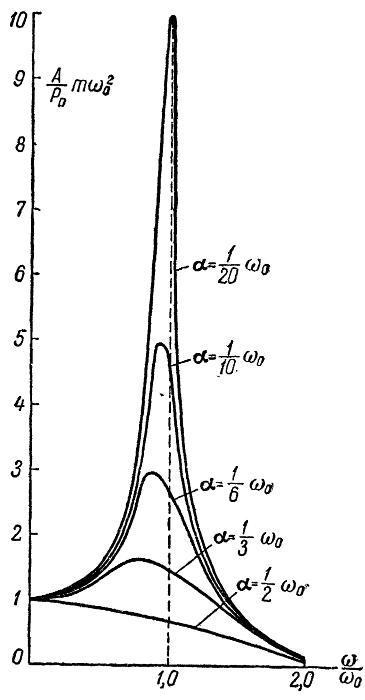

Рис. 142. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний по формуле (24) от частоты и затухания.

В ряде случаев резонанс может стать опасным явлением, влекущим за собой разрушение колебательной системы вследствие чрезмерного возрастания амплитуды.

Еще в первые годы развития быстроходных машин было установлено, что неспокойный ход валов, угрожающий целости вала, наблюдается при определенном числе оборотов. Именно это обстоятельство и дало повод искать причину происходивших поломок валов в явлении резонанса. Понятие о *критической скорости вращения* или о *критическом числе оборотов* было найдено первоначально опытным путем и только впоследствии в процессе развития машиностроения получило качественное и количественное истолкование.

Чтобы понять, каким образом возникают резонансные колебания вращающихся валов, представим себе ротор (вращающуюся часть) турбины в виде оси с насаженным на нее диском Как бы точно ни был изготовлен диск, как бы хорошо ни был он центрирован на оси, неизбежные погрешности в обработке могут привести к тому, что ось вращения не будет проходить через центр тяжести диска Таким образом, в огромном большинстве случаев насаженный на вал диск будет обладать некоторым «весовым» *эксцентриситетом* [1]), который может быть определен как расстояние e между центром тяжести диска и осью вращения. Очевидно, что при вращении диска этот эксцентриситет вызовет появление центробежной силы, которая будет стремиться изогнуть вал. Таким образом, диск будет вращаться, как это схематически показано на рис. 143, вокруг изогнутой оси.

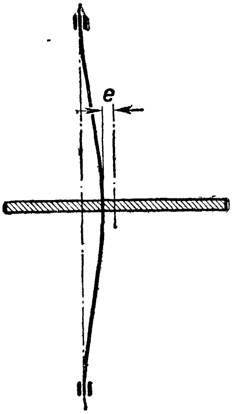

Рис. 143. «Весовой» эксцентриситет плохо центрированного диска.

Во время вращения вала центробежная сила периодически меняет свое направление относительно оси вала и таким образом, действует как колебательная нагрузка. При некотором определенном числе оборотов, которое называют критическим, частота изменения направления силы совпадает с собственной частотой колебаний вала, и резонансное возрастание амплитуды может повлечь за собой разрушение машины.

Однако современные паровые *турбины работают при таком числе оборотов вала в минуту, которое в несколько раз превышает критическую скорость вращения* [2]). Уже после того как подобная турбина была построена, выяснилось, что быстрый переход за пределы критической скорости, — настолько быстрый, чтобы вал *не успел раскачаться*,— гарантирует при дальнейшем возрастании скорости от опасности аварии. Это объясняется тем, что за пределами критической скорости уже больше не имеет места явление резонанса. Центр тяжести эксцентрично насаженного на вал колеса сам отыскивает геометрическую ось вращения и устойчиво удерживается на этой оси; вал вращается в несколько изогнутом виде.

§ 62. Связанные колебания

Между колебательными системами может быть установлена «связь», приводящая колебания систем к некоторому согласованию друг с другом. В этом случае колебания называют *связанными*. Примером могут служить колебания двух маятников, изображенных на рис. 144; каждый из показанных здесь маятников представляет собой гирю, подвешенную на нити; нити обоих маятников скреплены с концами третьей нити, посредине которой подвешен не-

[1]) От латинского ex — в н е и centrum — с р е д о т о ч и е, ц е н т р.

[2]) Экономический к. п. д. турбины достигает максимума тогда, когда окружная скорость вращения колеса турбины составляет $^1/_2$ скорости струи пара или воды (§ 50). Скорость падающей воды даже при значительном напоре сравнительно невелика, но скорость выхода пара под давлением в 15—20 *ат* составляет примерно 1 *км/сек*, т. е. превышает скорость полета пули. Желая сконструировать турбину с удовлетворительным к. п. д., Лаваль ввел в технику скорость вращения до 20 000 оборотов вала в 1 мин.