§ 65. Фазовая и групповая скорости волн

Для изучения волновых процессов с помощью написанных выше уравнений (§ 63) необходимо знать скорость распространения волн u, которая зависит от свойств среды. В среде более плотной (и, следовательно, более инертной) волны распространяются медленнее, нежели в среде менее плотной; в среде более упругой — быстрее, нежели в среде менее упругой.

Вычисления дают следующий результат[1]): для *продольных* волн (рис. 147, *а*) скорость распространения

$$u_{\parallel} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \tag{5}$$

а для *поперечных* (рис. 147, *б*)

$$u_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \tag{6}$$

где K — модуль объемной упругости (при изменении объема, происходящем без притока и отдачи тепла), G — модуль сдвига, ρ — плотность среды.

В твердых телах продольные волны опережают поперечные, так как в большинстве случаев модуль объемной упругости значительно превышает по величине модуль сдвига; например, в железе $u_{\parallel}=5170$ *м/сек*, $u_{\perp}=2550$ *м/сек*.

Скорость распространения волн на поверхности жидкости зависит от соотношения между глубиной жидкости и длиной волны. В наиболее общем случае скорость распространения волн выражается довольно сложной формулой. Но для тех классов волн, у которых длина волны весьма велика или же, наоборот, весьма мала по сравнению с глубиной жидкости, упомянутая формула сильно упрощается.

У *приливных* волн (обусловленных совокупным действием тяготения к Солнцу и Луне) длина волны достигает сотен километров, т. е. является величиной весьма большой по сравнению с глубиной моря. Вследствие этого скорость распространения приливных волн практически зависит только от глубины моря h и определяется формулой

$$u = \sqrt{gh}, \tag{7}$$

где g — ускорение силы тяжести.

У обычных *морских* волн длина волны, наоборот, весьма мала по сравнению с глубиной. В связи с этим скорость распространения

[1]) Вывод формулы для скорости волн приведен в § 134.

этих волн зависит только от длины волны и определяется формулой

$$u=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \tag{8}$$

где λ — длина волны.

В случае чрезвычайно коротких, так называемых *капиллярных* волн главную роль играют междучастичные силы, а не сила тяжести. Скорость распространения капиллярных волн определяется формулой

$$u=\sqrt{\frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}}, \tag{9}$$

где α — поверхностное натяжение, ρ — плотность жидкости.

Приведенные формулы показывают, что в случае продольных и поперечных упругих волн скорость волнового процесса не зависит от длины волны. Иначе обстоит дело в случае морских волн. Мы видим, и это нетрудно подтвердить наблюдением, что скорость морской волны тем больше, чем волна длиннее; длинные волны догоняют, поднимают на себя и затем опережают короткие. Скорость капиллярной волны, наоборот, тем больше, чем волна короче.

Формулы (8) и (9) для скорости распространения поверхностных волн можно преобразовать, связав скорость распространения u с периодом колебаний T. Учитывая, что $\lambda=uT$, возводя обе части формулы (6) в квадрат и сокращая величину u, для скорости морских волн вместо формулы (6) получаем:

$$u=\frac{gT}{2\pi}.$$

При $T=10$ сек. морская волна распространяется со скоростью 15,6 *м/сек*, т. е. 56 *км/час*. При периоде в 20 сек. скорость морской волны достигает 112 *км/час*.

Следует отметить, что здесь речь идет о так называемой *фазовой скорости* волн. Перенос энергии поверхностными волнами осуществляется движением группы волн и происходит (как будет пояснено ниже) в случае морских волн со скоростью, в два раза меньшей, а в случае капиллярных волн со скоростью, в полтора раза большей, чем фазовая скорость.

Изменение скорости распространения волн в зависимости от длины волны называют *дисперсией* [1]). Волновой процесс, связанный с распространением света, характеризуется ясно выраженной зависимостью скорости от частоты — дисперсией света.

Звуковые волны распространяются со скоростью, которая практически одинакова для волн разной длины. Только при тех

---

[1]) От латинского dispergo — рассеиваю.

частотах, при которых вследствие особенностей молекулярного строения среды упругие волны испытывают быстрое затухание, наблюдается более или менее заметная зависимость скорости волн от их длины.

При землетрясениях по земному шару распространяются волны упругих деформаций, эти волны называют *сейсмическими*. В их состав входят продольные, поперечные и поверхностные волны. Установлено, что поперечные волны, т. е. волны сдвига, не проходят глубже 2900 *км*. Ядро Земли состоит, по-видимому, из жидкообразной раскаленной среды, которая не передает деформаций сдвига.

В земной коре сдвиги, вызванные землетрясениями, передаются со скоростью около 4,5 *км/сек*; на глубине 1000 *км* поперечные сейсмические волны имеют скорость около 6 *км/сек*. Продольные сейсмические волны обгоняют поперечные и движутся в поверхностных слоях со скоростью 8 *км/сек*, а на глубине 1000 *км* — со скоростью 11 *км/сек*.

Дисперсия сейсмических волн была изучена впервые акад. Б. Б. Голицыным (в 1906—1910 гг.), труды и точнейшие приборы которого создали новое направление в развитии науки о землетрясениях. В настоящее время регистрацию и исследование сейсмических волн осуществляют во всем мире около 500 сейсмических станций.

Групповая скорость волн. Волновой процесс есть процесс пространственного переноса энергии: перенос энергии происходит вследствие передачи импульса упругой деформации от одного участка среды к другому. Казалось бы, что поэтому скорость переноса энергии должна совпадать со скоростью распространения волн. В действительности это совпадение не всегда имеется. Как мы сейчас увидим, энергия передается со скоростью волны лишь при отсутствии дисперсии или же при наличии только одного ряда волн с некоторой определенной частотой.

Представим себе, что в среде одновременно и в одном направлении распространяются ряды волн, частоты которых несколько различны; предположим, кроме того, что скорость волн зависит от частоты, т. е. имеет место дисперсия. Благодаря неодинаковой скорости распространения волн различной длины эти волны будут приходить в некоторую точку волнового поля, вообще говоря, с различными фазами, и в каждый данный момент времени результирующее смещение выбранной нами точки будет зависеть от соотношения фаз отдельных колебаний. Если эти фазы будут почти противоположны, то результирующее колебание будет невелико. Но в том месте, где фазы отдельных колебаний в данный момент времени совпадут, там в результате интерференции все колебания сложатся и дадут результирующее колебание с наибольшей возможной амплитудой. При этом плотность энергии в данной точке среды будет, очевидно, максимальной. Но в следующий момент времени соотношение фаз неизбежно изменится и в связи с этим уменьшится и плотность энергии в этой точке. Будем называть точку с наибольшей плотностью энергии *центром энергии* группы волн. Очевидно, что в силу непрерывно изменяющегося соотношения фаз отдельных колебаний центр энергии будет перемещаться в пространстве. Вследствие интерференции картина распространения группы волн с близкими частотами будет иметь вид, показанный на рис. 157. Амплитуда смещений в центре энергии будет наибольшей; впереди и позади волны гасят друг друга.

Определим скорость перемещения центра энергии. Для этого положим, что в некоторый момент времени t центр энергии находится

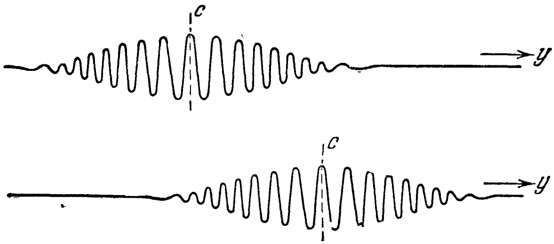

Рис. 157. Волновое поле группы волн с близкими частотами и перемещение центра энергии C.

в точке с координатой y. Смещение, соответствующее каждому отдельному колебанию, можно определить по уравнению волны

$$x = A\sin\varphi,$$

где фаза

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{y}{u}\right),$$

или, если вместо угловой частоты ω подставить выражение ω через длину волны $\left(\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\frac{u}{\lambda}\right)$:

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{u}{\lambda}t - \frac{y}{\lambda}\right).$$

Где в группе волн находится центр энергии, там колебания, вызываемые близкими по длине волнами, усиливают друг друга. Иначе говоря, *в центре энергии фазы колебаний у волн различной, но близкой длины совпадают.* Стало быть, в центре энергии фаза колебаний не зависит от длины волны и, следовательно, производная от фазы по длине волны равна нулю:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = 2\pi\left(t\frac{d\left(\frac{u}{\lambda}\right)}{d\lambda} + y\frac{1}{\lambda^2}\right) = 0.$$

Это уравнение, характеризующее положение центра энергии его координатой y в момент времени t, можно переписать так:

$$y = -\lambda^2 \frac{d\left(\frac{u}{\lambda}\right)}{d\lambda} \cdot t = vt. \tag{10}$$

Мы видим, таким образом, что положение центра энергии группы волн, определяемое координатой центра энергии y, изменяется со временем, а именно: по смыслу формулы (10) ясно, что центр энергии перемещается в пространстве со скоростью v, причем

$$v = -\lambda^2 \frac{d\left(\frac{u}{\lambda}\right)}{d\lambda}. \tag{11}$$

Скорость *v есть скорость перемещения энергии* группы волн; эту скорость называют *групповой скоростью* в отличие от скорости распространения отдельной волны — фазовой скорости u.

Нетрудно видеть, что если дисперсия отсутствует, т. е. $\frac{du}{d\lambda} = 0$, то $v = u$. Это означает, что в случае, *когда волны разной длины распространяются с одинаковой скоростью, группа волн движется и переносит энергию со скоростью распространения отдельной волны.*

Для звуковых волн групповая скорость практически совпадает с фазовой.

В случае поверхностных волн, например морских, волн гнутия стержня и т. д., фазовая скорость различна для волн разной длины. Поэтому в этих случаях группа близких по длине волн распространяется со скоростью, отличной от скорости распространения отдельной волны.

Пусть

$$u = k\lambda^n, \tag{12}$$

где $k = \text{const}$, а показатель степени n имеет характерное значение для волн различной природы (например, для морских волн, как упоминалось, $n = \frac{1}{2}$; для ряби, т. е. капиллярных волн, $n = -\frac{1}{2}$).

Из (12) имеем:

$$\frac{u}{\lambda} = k\lambda^{n-1}$$

и, стало быть,

$$\frac{d\left(\frac{u}{\lambda}\right)}{d\lambda} = (n-1)k\lambda^{n-2}.$$

Умножая обе части этого уравнения на λ^2 и заменяя в правой части $k\lambda^n$ через u, находим согласно формуле (11), что

$$v = (1 - n)\, u. \tag{13}$$

Мы видим, таким образом, что группа морских волн $\left(n = \frac{1}{2}\right)$ перемещается со скоростью, в два раза меньшей, чем скорость распространения отдельной волны:

$$v = \frac{1}{2} u.$$

Если морские волны при шторме имеют период 20 сек. и движутся соответственно формуле $u = \frac{gT}{2\pi}$ со скоростью 112 *км/час*, то при распространении волнения передние волны затухают, а группа волн перемещается со скоростью 56 *км/час*.

Рябь — группа капиллярных волн — распространяется, напротив, со скоростью, большей, чем отдельные волны. Действительно, в этом случае в формуле (12) показатель степени $n = -\frac{1}{2}$, и поэтому по формуле (13)

$$v = \frac{3}{2} u.$$

Заметим, что общее уравнение групповой скорости (11), если продифференцировать, как указано в этом уравнении, отношение $\frac{u}{\lambda}$ можно переписать в следующей, часто применяемой форме:

$$v = u - \lambda \frac{du}{d\lambda}. \tag{14}$$