горизонтальных слоях газа, вызывается изменением вертикальной составляющей скорости молекул, движущихся из верхнего слоя в нижний и из нижнего в верхний. По той же причине происходит уплотнение нижних слоев газа, чем и обеспечивается равенство средних скоростей.

Мы видим, таким образом, что с равным правом весомость газов можно рассматривать или как следствие ускорения молекул при их движении вниз, или как проявление барометрической разности давлений.

## § 83. Основное уравнение кинетической теории газов

Выведем весьма важное уравнение, устанавливающее связь между давлением $p$ газа, его объемом $v$ и кинетической энергией $E$ поступательного движения его молекул.

Для простоты вывода примем, что оболочка, в которую заключен газ, имеет форму шара радиуса $R$; однако окончательное уравнение будет справедливо независимо от того, какую форму имеет оболочка, и даже от того, существует ли она вообще.

Мы сделаем следующее предположение: рассматриваемый газ настолько разрежен или же молекулы его настолько малы, что столкновения молекул происходят не слишком часто, так что каждая молекула может несколько раз удариться о стенки оболочки, раньше чем она столкнется с другой молекулой. (Мы делаем это предположение тоже только в целях простоты рассуждений; его можно было бы и не делать, причем мы пришли бы в итоге к тем же самым выводам, но путем более сложных расчетов.)

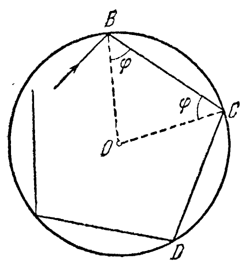


Рис 188 К выводу основного уравнения кинетической теории газов.

Что касается самих столкновений, то мы допустим, что они происходят по законам удара вполне упругих шаров.

Рассмотрим движение одной из молекул внутри сосуда. Пусть масса молекулы будет $m$, скорость ее $u$. Пусть она в точке $B$ ударилась о стенку. Рис. 188 изображает сечение шарообразного сосуда, проведенное через центр его $O$ и через линию движения молекулы. Легко сообразить, что рассматриваемая молекула будет двигаться в плоскости этого сечения все время, пока не столкнется с другой молекулой, что путь ее будет состоять из равных хорд $BC$, $CD$ и т. д. и что углы ее удара о стенки и отражения от стенок всякий раз будут иметь одну и ту же величину $\varphi$.

Наша задача — подсчитать давление $p$ газа, т. е. ту силу, с какой молекулы действуют на единицу поверхности оболочки посредством ударов. Для этого сначала определим импульс, передаваемый оболочкой молекуле при каждом столкновении. Этот импульс равен приращению количества движения молекулы, а так как при ударе о стенку изменяется только нормальная составляющая количества движения молекулы, то указанный импульс равен, следовательно, разности $mu\cos\varphi-(-mu\cos\varphi)=2\,mu\cos\varphi$. На основании третьего закона Ньютона такую же величину импульса молекула передает оболочке при каждом ударе. Так как путь, проходимый молекулой в 1 сек., есть $u$ и так как от одного удара об оболочку до другого молекула проходит путь $2R\cos\varphi$ (равный хорде), то число ударов данной молекулы в 1 сек. будет $\frac{u}{2R\cos\varphi}$; поэтому суммарный импульс, передаваемый оболочке рассматриваемой молекулой в секунду, будет:

$$2mu\cos\varphi\frac{u}{2R\cos\varphi}=\frac{mu^2}{R}.$$

Суммарный же импульс, передаваемый оболочке за 1 сек. всеми молекулами, будет $\frac{1}{R}\Sigma mu^2$, где суммирование распространяется на все молекулы (различные молекулы имеют различную скорость, они могут иметь также различную массу: наш газ может представлять собой смесь газов).

Теперь уже легко найти давление газа. Это будет не что иное, как суммарный импульс, получаемый в 1 сек. единицей поверхности оболочки, а именно:

$$p=\frac{\sum mu^2}{R\cdot 4\pi R^2}=\frac{\sum mu^2}{4\pi R^3}=\frac{\frac{1}{3}\sum mu^2}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{\frac{2}{3}\sum\frac{mu^2}{2}}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Но $\sum\frac{mu^2}{2}$ есть поступательная кинетическая энергия $E$ молекул газа, а $\frac{4}{3}\pi R^3$ есть объем $v$ газа, поэтому последняя формула перепишется:

$$p=\frac{\frac{2}{3}E}{v}, \tag{2}$$

что значит: *давление газа численно равняется двум третям поступательной энергии движения молекул, заключающихся в единице объема газа.* Найденное уравнение и есть основное уравнение кинетической теории газов. Его можно переписать еще и так:

$$pv=\frac{2}{3}E, \tag{3}$$

т. е. *произведение давления на объем газа равняется двум третям энергии поступательного движения молекул газа.*

При помощи этого уравнения легко сделать вывод о величине скорости поступательного движения молекул. Преобразуем это уравнение так:

$$pv=\frac{1}{3}\sum mu^2=\frac{1}{3}\,mN\cdot\frac{1}{N}\sum u^2=\frac{1}{3}\,Mc^2,$$

где $M$ — масса газа, а $c$ — средняя квадратичная скорость, которая, как легко видеть, определяется формулой

$$c=\sqrt{\frac{u_1^2+u_2^2+u_3^2+\ldots}{N}}. \tag{4}$$

Следует иметь в виду, что средняя квадратичная скорость $c$ не равна *средней скорости* $\bar{u}$:

$$\bar{u}=\frac{|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots}{N}. \tag{5}$$

Средняя скорость есть среднее значение арифметических величин скоростей молекул газа, тогда как средняя квадратичная скорость представляет собой величину, квадрат которой равен среднему значению квадратов скоростей молекул газа.

Вышеприведенное уравнение показывает, что, зная давление, объем и массу газа, можно вычислить среднюю квадратичную скорость по формуле

$$c=\sqrt{3\frac{pv}{M}}. \tag{6}$$

На основании максвеллова закона распределения скоростей можно показать, что средняя скорость пропорциональна средней квадратичной скорости, а именно

$$\bar{u}=\sqrt{\frac{8}{3\pi}}\cdot c; \tag{7}$$

наивероятнейшая скорость $\rho$ тоже пропорциональна средней квадратичной скорости:

$$\rho=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot c. \tag{8}$$

Так как $3\pi>8$, то мы видим, что средняя квадратичная скорость $c$ несколько превышает (примерно на 8%) среднюю скорость $\bar{u}$, а эта последняя в свою очередь больше (в 1,22 раза), чем наивероятнейшая скорость $\rho$:

$$c>\bar{u}>\rho.$$

Основное уравнение кинетической теории газов было впервые выведено петербургским академиком Даниилом Бернулли в 1738 г. (т. е. за 110 лет до того, как в науку было введено понятие об энергии; Бернулли получил правильную зависимость между давлением газа, его плотностью и квадратом скорости движения молекул).

Что давление газа слагается из импульсов, оказываемых отдельными молекулами газа при изменении их направления движения, это с полной достоверностью доказано совпадением разнообразных следствий уравнения (2) с опытными фактами. Кроме того, некоторые эксперименты непосредственно показывают, как возникает давление газа. Из числа таких экспериментов простотой замысла и тщательностью выполнения отличаются опыты, поставленные в 1928 г. проф. А. С. Предводителевым. А. С. Предводителев наносил на одну сторону легкой пластинки, подвешенной на нити в вакууме, гидраты солей. Кристаллизационная вода испарялась из соли. При каждом акте испарения молекула воды, покидая поверхность пластинки, оказывала на пластинку импульс $mu$ подобно явлению отдачи при выстреле. Вследствие этого пластинка отклонялась на некоторый угол, который измерялся и сопоставлялся с вычисленным.

## § 84. Молекулярно-кинетическое понимание абсолютной температуры

Как было показано выше, идеальный газ подчиняется основному уравнению кинетической теории. Напишем это уравнение для 1 моля:

$$pv = \frac{2}{3} E.$$

Здесь

$$E = \frac{1}{2} \sum mu^2$$

есть поступательная энергия молекул, заключающихся в моле газа.

С другой стороны, идеальный газ подчиняется уравнению Клапейрона

$$pv = RT.$$

Сопоставление обоих уравнений дает:

$$E = \frac{3}{2} RT.$$

Разделим обе части этого равенства на число молекул в 1 моле, т. е. на $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$; при этом в левой части получится средняя поступательная энергия одной молекулы:

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2} kT, \tag{9}$$