ментарных горизонтальных полосок $v dp$, то обнаруживается, что

$$A_{\text{техн}} = -\Delta i = -\int_1^2 v\,dp. \tag{3}$$

Эту формулу, обоснованную нами графически, нетрудно получить и аналитически. Действительно, $di = d\,(u+pv) = du + p\,dv + v\,dp$; здесь первые два члена в правой части в сумме равны δQ. Стало быть, при $\delta Q = 0$, т. е. для адиабатных изменений,

$$di = v\,dp,$$

что и приводит к формуле (3).

§ 133. Адиабатное течение газа

Для многих технических приложений газодинамики весьма важным случаем является течение газа по трубопроводу переменного сечения без притока или отдачи тепла (т. е. адиабатно) и без производства работы. В этом случае, когда $Q=0$ и $A_{\text{техн}}=0$ (для упрощения положим, что и $A_{\text{трения}}=0$), основное уравнение газодинамики преобразуется в уравнение, которое является *термодинамическим обобщением уравнения Бернулли*:

$$i_1 + \frac{w_1^2}{2g} = i_2 + \frac{w_2^2}{2g} = \text{const}. \tag{4}$$

Здесь в отличие от уравнения Бернулли (§ 49) вместо давления, деленного на плотность, фигурирует теплосодержание; но $i = u + pv$, и очевидно, что для потока несжимаемой жидкости, когда нет необходимости учитывать изменение термодинамического состояния (т. е. когда внутренняя энергия жидкости предполагается постоянной, $u_1 = u_2$ и когда плотность $\frac{1}{v}$ неизменна), уравнение (4) переходит в уравнение Бернулли.

Из термодинамического обобщения уравнения Бернулли мы видим, что *сумма теплосодержания и кинетической энергии газового потока при стационарном адиабатном течении без производства работы одинакова для всех сечений потока.*

Течение, при котором скорость газа убывает, а плотность, давление и температура растут, называется *течением со сжатием.* (Следует подчеркнуть, что здесь слово «сжатие» относится к термодинамическому состоянию потока, к удельному объему газа, а отнюдь не к площади поперечного сечения трубопровода; при не слишком больших начальных скоростях газа в расширяющемся трубопроводе газ затормаживается, кинетическая энергия его уменьшается, а температура и плотность растут, т. е. имеет место течение со сжатием.)

Течение, при котором кинетическая энергия потока растет, а плотность, давление и температура уменьшаются, называется *течением с расширением*. Рассмотрим оба случая течения в отдельности.

Течение с расширением имеет место, например, при истечении пара из котла или при истечении газа из камеры реактивного двигателя.

При адиабатном течении с расширением прирост кинетической энергии $\frac{w_2^2-w_1^2}{2g}$ вызывается убылью теплосодержания i_1-i_2 и падением температуры:

$$\frac{w_2^2-w_1^2}{2g}=i_1-i_2\approx c_p(T_1-T_2). \tag{5}$$

Падение температуры [1]) сопровождается уменьшением давления p и плотности газа γ; когда расширение газа происходит равновесно, можно воспользоваться уравнением Пуассона

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}=\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{\varkappa-1}.$$

Следовательно,

$$\frac{w_2^2-w_1^2}{2g}=c_pT_1\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]. \tag{6}$$

Здесь согласно уравнению Майера $c_p=\frac{\varkappa R}{\varkappa-1}$.

Представим себе, что из баллона, где давление газа p_1 и температура T_1 (а w_1 вследствие большого поперечного сечения баллона приближенно можно принять равной нулю), газ адиабатно вытекает через отверстие площадью S в резервуар, в котором давление («противодавление») p_0. *При небольших перепадах давления* (когда p_1 превышает p_0 на несколько процентов или десятков процентов, но не более чем в 1,8—1,9 раза) *давление газа в вытекающей струе p_2 равно противодавлению p_0*. В этом случае согласно уравнению (6) *скорость истечения* определяется формулой

$$w_2=\sqrt{\frac{2g\varkappa RT_1}{\varkappa-1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}. \tag{7}$$

Здесь p_2 — статическое давление в вытекающей струе.

Весовой расход газа G (в *кг/сек*) равен произведению площади поперечного сечения отверстия (в $м^2$) на скорость истечения (в *м/сек*) и на плотность вытекающего газа (в $кг/м^3$):

$$G=\gamma_2\omega_2S.$$

По мере уменьшения противодавления p_0 давление в вытекающей струе p_2 будет уменьшаться, а вместе с ним будет адиабатно уменьшаться по закону Пуассона и плотность вытекающего газа; скорость истечения будет расти.

Весовой расход газа через данное отверстие S определяется двумя величинами: плотностью и скоростью истечения газа. Первая из этих величин, γ_2, с уменьшением противодавления убывает, а вторая, w_2, наоборот, растет. *Расход газа с уменьшением противодавления p_0 первое время увеличивается* за счет быстрого увеличения скорости; затем расход замедляется за счет заметного уменьшения плотности и, наконец, *становится постоянным*: каким бы малым ни было противодавление, расход газа будет иметь одну и ту же величину.

[1]) Понятно, что правая часть уравнения (5) справедлива только при $c_p\approx\mathrm{const}$, т. е. для не слишком больших перепадов температуры.

Таким образом, оказывается, что когда противодавление составляет примерно половину давления в баллоне (более точное соотношение указано ниже), то дальнейшее уменьшение противодавления является бесполезным для повышения скорости истечения и расхода газа. В струе устанавливаются некоторые так называемые *критические* значения скорости истечения, давления, температуры и плотности газа, которые уже более не изменяются, как бы мы дальше ни уменьшали противодавление. Если до этого момента давление на выходе в струе, как было упомянуто выше, оставалось равным противодавлению ($p_2=p_0$), то с указанного момента *при истечении газа с критической скоростью у выходного отверстия устанавливается скачок давления* ($p_2>p_0$), так как уменьшение p_0 уже не будет больше вызывать уменьшения p_2.

Пусть, например, в баллоне заключен газ под давлением в 80 *ат*; можно выпускать этот газ в пустоту, в атмосферу или перепускать этот газ в другой баллон, где давление составляет несколько атмосфер; во всех случаях расход газа, скорость его истечения и давление в вытекающей струе будут одинаковы и будут оставаться постоянными до тех пор, пока противодавление не достигнет 42 *ат* (при дальнейшем росте противодавления расход и скорость истечения будут уменьшаться).

Можно доказать (см. примечание на стр. 532—533), что отношение давления в баллоне перед истечением к *критическому давлению* в струе равно:

$$\frac{p_1}{p_к}=\left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}, \quad где \quad \varkappa=\frac{c_p}{c_v} \tag{8}$$

(для воздуха $p_1/p_к=1{,}89$).

Скорость газа, вытекающего из отверстия или из сужающегося насадка, не может быть больше *критической скорости*:

$$w_к=\sqrt{\frac{2g\varkappa R}{\varkappa+1}T_1}. \tag{9}$$

Понижение температуры в струе при критическом истечении согласно уравнению Пуассона и формуле (8) равно:

$$\frac{T_к}{T_1}=\left(\frac{p_к}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}=\frac{2}{\varkappa+1}.$$

Таким образом, $T_1\frac{2}{\varkappa+1}=T_к$, и, стало быть, формулу (9) можно переписать так:

$$w_к=\sqrt{g\varkappa RT_к}.$$

Критическая скорость равна скорости, с которой распространяется звук при имеющейся в струе температуре $T_к$. Ни при каком сколь угодно большом давлении в баллоне газ не может вытекать из отверстия со скоростью, большей, чем скорость звука.

Когда давление в струе равно критическому давлению, а скорость истечения равна скорости звука, то расход газа G будет иметь наибольшую величину, возможную при начальных термодинамических параметрах газа в баллоне.

Вычисление показывает, что *максимальный расход газа* при критическом течении определяется формулой

$$G=S\sqrt{\frac{g\varkappa}{R}\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}}\cdot\frac{p_1}{\sqrt{T_1}}.$$

Для воздуха при $R=29{,}3$ и $\varkappa=1{,}4$ $G\approx0{,}4\frac{S_2p_1}{\sqrt{T_1}}$.

Чтобы понять физические причины, обусловливающие существование критических параметров в струе вытекающего газа, представим себе, что противодавление вдруг резко снижено (хотя бы до нуля); если скорость истечения уже достигла перед тем скорости звука, то «весть» об указанном событии никогда не будет передана возникшей звуковой волной разрежения в струю выходящего газа, и, стало быть, это событие не отразится на термодинамическом состоянии газа, вытекающего со скоростью распространения звуковых волн [1]).

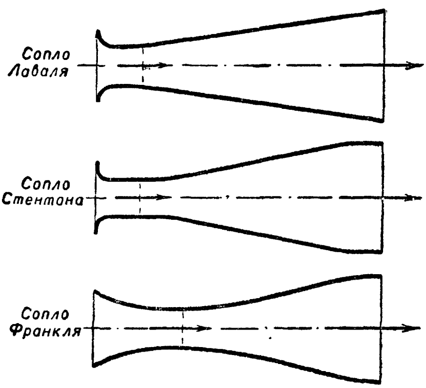

Рис. 268.

Регулируя режим течения газа определенным выбором профиля трубопровода, можно использовать избыточное давление, возникающее в струе при критическом истечении, и реализовать *скорости течения, превышающие скорость звука*. Физически эта задача заключается в том, чтобы изыскать условия, при которых неупорядоченное молекулярно-тепловое движение в газе, который уже движется со скоростью звука, частично превратить в упорядоченное движение и, таким образом сообщить массе газа скорость, превышающую критическую скорость истечения. С указанной целью Лавалем, Стентоном и советским ученым Франклем были разработаны сверхзвуковые сопла (рис. 268).

В сопле Лаваля скорость газа непрерывно растет: в сужающейся части сопла скорость возрастает от нуля до звуковой величины (рис. 269), в расширяющейся части сопла скорость возрастает от звуковой до сверхзвуковой величины.

Весовой расход воздуха через любое сечение выходного сопла имеет одну и ту же величину:

$$w_1S_1\gamma_1 = w_2S_2\gamma_2. \tag{10}$$

Это — *уравнение неразрывности для потока сжимаемого газа*. Отсюда может быть найдено соотношение между любыми двумя сечениями сопла.

---

[1]) Для вывода уравнений (8) и (9), определяющих критические значения скорости и давления выразим расход газа как функцию относительного изменения давления в струе $\pi = \frac{p_2}{p_1}$, допустив, что $w_1 = 0$:

$$G = S\gamma_2 w_2 = S\gamma_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}\sqrt{\frac{2g\varkappa R}{\varkappa-1}T_1\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}.$$

По уравнению состояния $\gamma_1 = \frac{p_1}{RT_1}$. После преобразования получаем:

$$G = Sp_1\sqrt{\frac{2g\varkappa}{(\varkappa-1)RT_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}\right]}.$$

Чтобы найти относительное уменьшение давления $\pi = \frac{p_2}{p_1}$, при котором рас-

Давление газа по мере приближения к выходу из сопла падает, как показано на рис. 269; при уменьшении давления (за критическую величину) скорость истечения растет медленнее, чем уменьшается плотность; поэтому увеличение скорости должно обеспечиваться расширением сопла: выходное сечение больше критического. Следует обратить внимание на различие между течением несжимаемой жидкости и течением газа при сверхкритическом перепаде давления: скорость несжимаемой жидкости (как и скорость газа при докритическом давлении) увеличивается в сужающихся трубах; наоборот, скорость при сверхкритических перепадах давления *после перехода за звуковую величину* увеличивается в расширяющихся соплах

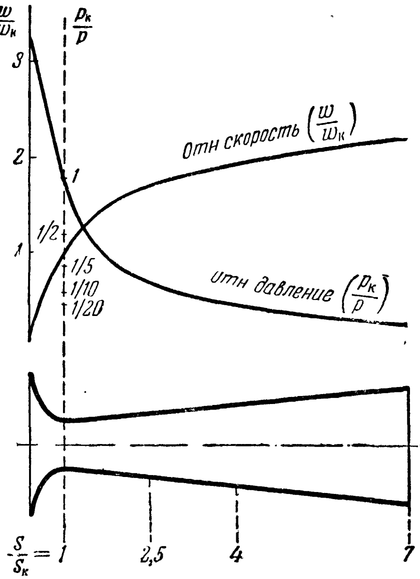

Рис. 269. Изменение давления и скорости в расширяющемся сопле для сверхзвукового течения воздуха.

Расширяющиеся сопла применяются в паровых и газовых турбинах, в реактивных двигателях и некоторых других устройствах

При больших относительных перепадах давления понижение температуры газа, текущего по расширяющемуся соплу, бывает очень значительным. Так, например, когда $\frac{p_1}{p_2}=100$, $t_1=15°$ C, то температура вытекающей струи воздуха понижается почти на 80°.

Течение со сжатием характеризуется уменьшением скорости потока и возрастанием давления, плотности и температуры газа Согласно уравнению (4) убыль кинетической энергии $\frac{w_1^2-w_2^2}{2g}$ вызывает прирост теплосодержания i_2-i_1 и повышение температуры:

$$\frac{w_1^2-w_2^2}{2g}=i_2-i_1\approx c_p(T_2-T_1). \tag{11}$$

ход газа будет наибольшим, приравняем нулю первую производную от расхода газа G по изменению давления π:

$$\frac{dG}{d\pi}=0.$$

Учитывая, что p_1 и T_1 от π не зависят, получаем:

$$\frac{dG}{d\pi}=\pi_к^{\frac{2}{\varkappa}}-\pi_к^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}=0.$$

Это уравнение приводит нас к формуле (8)

$$\pi_к=\frac{p_к}{p_1}=\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}.$$

Подставляя это значение $\pi_к$ в формулу (7) для скорости истечения, получаем формулу (9).

Отсюда относительное повышение теплосодержания при адиабатном течении со сжатием до полного затормаживания потока ($w_2=0$) получается равным

$$\frac{i_2}{i_1}=1+\frac{w_1^2}{2gi_1}.$$

Здесь величина gi_1 пропорциональна квадрату скорости звука. [Действительно, по формуле (2) (стр 265) $c_1^2=g\varkappa RT_1$; с другой стороны, $gi_1=gc_pT_1=g\frac{\varkappa R}{\varkappa-1}T_1$; следовательно, $gi_1=\frac{c_1^2}{\varkappa-1}$.]

Итак. *относительное повышение теплосодержания зависит только от отношения начальной скорости газа к скорости звука в потоке до торможения газа.*

Отношение скорости течения к скорости звука (от которого зависит изменение параметров газа при сжатии) называют *числом Маха*, или *числом Берстоу*, и обозначают символом M:

$$\mathsf{M}=\frac{w}{c}=\frac{w}{\sqrt{g\varkappa RT}}.$$

Вводя это обозначение в предыдущее уравнение, получаем

$$\frac{i_2}{i_1}=\frac{\varkappa-1}{2}\mathsf{M}_1^2. \qquad (12)$$

Когда изменения теплосодержания не слишком велики, так что теплоемкость можно считать постоянной, то

$$\frac{i_2}{i_1}=\frac{T_2}{T_1}.$$

Все, что было сказано выше для течения с расширением, вследствие *обратимости течения* можно применить и к течению со сжатием, переменив только знаки скоростей (т. е. считая, например, для рис. 269, что течение происходит справа налево). Когда начальная скорость превосходит скорость звука, в сужающейся части сопла происходит торможение сверхзвукового потока. В самом узком — *критическом* — сечении сопла скорость потока снижается до *местной скорости звука*, т. е. до величины скорости звука при той температуре, которая имеется в данном сечении (а температура в критическом сечении для течения со сжатием, понятно, больше начальной температуры). В расширяющемся участке сопла происходит дальнейшее торможение потока, при котором скорость понижается от звуковой до той или иной величины, иногда близкой к нулю, в зависимости от длины и геометрической формы сопла.

При больших начальных скоростях повышение температуры и увеличение давления при торможении намного превосходит те, которые имеют место при работе компрессоров. Так, для полета в стратосфере при M=4 и $T=216{,}5°$ K давление при равновесном торможении повышается более чем в 150 раз, т. е. гораздо значительнее, чем в двигателе внутреннего сгорания. При M=7 давление при торможении повышается более чем в 5000 раз, а температура становится выше, чем внутри мартеновской печи. Боевые головки баллистических ракет для защиты от чрезмерного нагрева покрывают жаростойкими составами, которые при движении падающей ракеты в нижних слоях атмосферы частично оплавляются.

Когда газ затормаживается до полной остановки ($w_2=0$), то по уравнению (12) при равновесном торможении получаются следующие значения для повышения температуры и давления:

M =	3	5	7	10
$\frac{\Delta T}{T_1}$ =	1,8	4,5	8,4	15
$\frac{p_2}{p_1}$ =	37	602	5900	95 000 [1]).

[1]) В действительности вследствие неравновесности торможения повышение давления при M=5 бывает примерно в 3 раза, а при M=10 в десятки раз меньше.