§ 7. Примеры применения теоремы Остроградского — Гаусса

Применим теорему Остроградского — Гаусса к вычислению вектора электрической индукции в некоторых частных случаях.

Рассмотрим электрическое поле сферы с зарядом Q, равномерно распределенным по поверхности. Из соображений симметрии замечаем, что силовые линии направлены по радиусам. Для определения индукции в точке M, удаленной от центра на расстояние r, проведем через M концентрическую сферическую поверхность (рис. 10). Тогда по теореме Остроградского — Гаусса

$$N = D \cdot 4\pi r^2 = 4\pi Q,$$

откуда

$$D = \frac{Q}{r^2},$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon r^2}. \qquad (12)$$

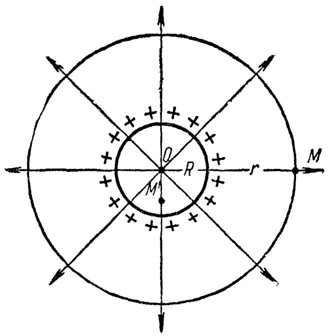

Рис. 10. Электрическое поле заряженной проводящей сферы радиуса R.

Следовательно, электрическое поле, создаваемое сферой, равномерно заряженной по поверхности, тождественно вне этой сферы полю точечного заряда, помещенного в центре сферы и равного заряду сферы.

Наибольшее значение индукции и напряженности поля наблюдается на поверхности сферы (при $r=R$, где R — радиус сферы):

$$D_{\text{макс}} = \frac{Q}{R^2},$$

$$E_{\text{макс}} = \frac{Q}{\varepsilon R^2}.$$

Введя поверхностную плотность заряда σ ($Q=4\pi R^2\sigma$), получим:

$$D_{\text{макс}} = 4\pi\sigma, \qquad E_{\text{макс}} = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}. \qquad (12')$$

В любой точке M' внутри заряженной сферы электрическое поле равно нулю. Поток индукции через любую замкнутую поверхность внутри сферы равен нулю, поскольку внутри этой поверхности нет зарядов (они расположены только на поверхности сферы).

В качестве второго примера рассмотрим поле, образованное весьма длинным заряженным цилиндром (например, заряженной проволокой) с радиусом сечения r. В этом случае линии индукции, как и силовые линии, направлены по радиусам круговых сечений цилиндра с одинаковой густотой во все стороны относительно оси цилиндра. Очевидно, что поток индукции через боковую поверхность коаксиального цилиндра радиуса R и длиной h (рис. 11) равен $2\pi RhD$; поток индукции через основания этого цилиндра равен нулю, так как вектор $\boldsymbol{D}$ параллелен основаниям. Если поверхностную плотность электричества на заряженном цилиндре обозначить через σ, то суммарный заряд на отрезке h заряженного цилиндра будет равен $Q=2\pi rh\sigma$.

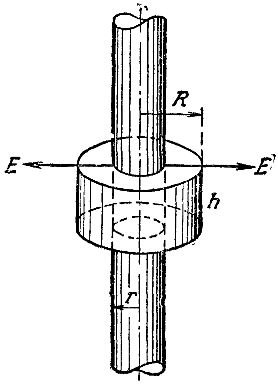

Рис. 11. К вычислению напряженности поля заряженного цилиндра

По теореме Остроградского — Гаусса

$$N = 2\pi RhD = 4\pi Q = 4\pi \cdot 2\pi rh\sigma.$$

Следовательно,

$$D = \varepsilon E = \frac{4\pi r\sigma}{R}, \qquad (13)$$

т. е. напряженность поля весьма длинного заряженного цилиндра обратно пропорциональна расстоянию от оси цилиндра.

Рассмотрим теперь поле между двумя бесконечно большими п а р а л л е л ь н ы м и п л а с т и н а м и, заряженными разноименно, с поверхностной плотностью электричества $+\sigma$ (одна пластина) и $-\sigma$ (другая пластина). Поток индукции через боковую поверхность цилиндра, показанного на рис. 12, равен нулю, так как линии индукции, как и силовые линии, между пластинами направлены перпендикулярно к плоскости пластин и, следовательно, параллельны образующим цилиндра. Во внешнем пространстве поля нет, так как действие двух разноименно заряженных пластин (при их бесконечно большой величине и численно одинаковой плотности электризации) взаимно компенсируется. Следовательно, поток индукции через всю замкнутую поверхность цилиндра, показанного на рис. 12, равен SD, где S — площадь основания этого цилиндра, а D — вектор индукции в точке A (у того основания цилиндра, которое находится между пластинами). Количество электричества на отсекаемой цилиндром части пластины равно $+\sigma S$.

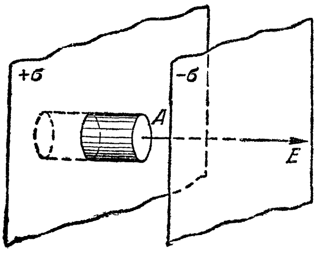

Рис. 12. К вычислению напряженности поля между заряженными пластинами.

По теореме Остроградского — Гаусса

$$N = SD = 4\pi Q = 4\pi\sigma S.$$

Следовательно,

$$D = \varepsilon E = 4\pi\sigma, \tag{14}$$

т. е. напряженность поля между двумя параллельными, бесконечно большими, разноименно заряженными пластинами во всех точках между пластинами имеет не только одинаковое направление, но и одинаковую величину.

В случае параллельных пластин ограниченного размера соотношение $D=4\pi\sigma$ остается справедливым для центральной части поля между пластинами (по мере приближения к краям пластин оно становится неточным, но погрешность является тем меньшей, чем меньше расстояние между пластинами в сравнении с размерами пластин).

Соотношением $D=4\pi\sigma$ можно воспользоваться при экспериментальном изучении любого электростатического поля. Если внести в изучаемое поле две тонкие металлические пластины, укрепленные

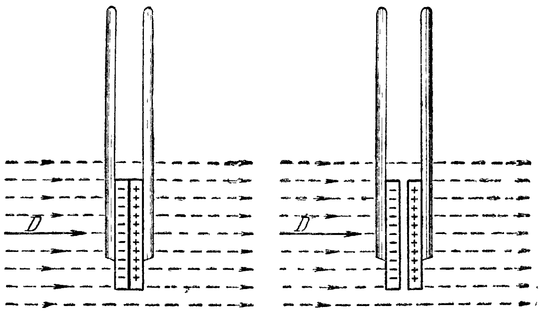

Рис. 13. Измерение электрической индукции поля посредством пластинок Ми.

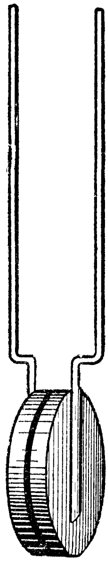

Рис. 14. Пластинки Ми.

на изоляторе (рис. 13 и 14), а затем, слегка раздвинув их, вынести из поля, то нетрудно измерить *индуцированный на них заряд*. Если пластины расположены перпендикулярно к линиям индукции, то плотность заряда (его отношение к площади пластин) пропорциональна величине вектора индукции. Если же пластины в момент разделения их в поле были расположены под острым углом к направлению линий индукции, то индуцированный на них заряд будет меньше, а именно, *плотность заряда будет пропорциональна проекции вектора D на нормаль к поверхности пластин.*

Описанный опыт придает наглядность потоку вектора электрической индукции как величине, пропорциональной плотности электричества, которое может быть индуцировано полем.