По смыслу вывода уравнение (а) справедливо также и для случая выключения тока. Интегрируя уравнение (а) для указан-

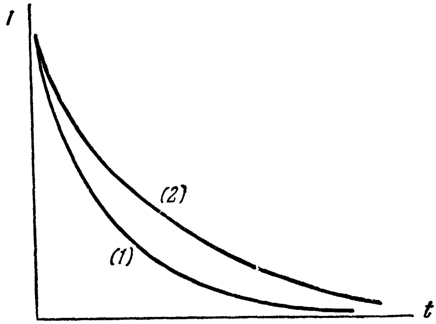

Рис. 316. Убывание тока при размыкании цепи Кривая 1 — для цепи с большим сопротивлением и малой индуктивностью, кривая 2 — для цепи с меньшей величиной отношения R/L

ного случая, когда $\mathscr{E}_0=0$ и при $t=0$ $I=I_0$, получаем:

$$-\frac{R}{L}t=\ln\frac{I}{I_0},$$

т. е.

$$I=I_0e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{9}$$

Рис. 316 поясняет этот *закон убывания тока* при выключении из цепи электродвижущей силы, создававшей ток I_0.

§ 74. Энергия магнитного поля тока. Индуктивность и энергия электромагнита. Индуктивность кабеля

Энергия магнитного поля может быть подсчитана, если известны напряженность поля в любой точке и магнитная проницаемость. Весь объем, в котором имеется магнитное поле, делят на бесконечно малые элементы объема и, в согласии с формулой (12) в § 58, считают, что в каждом таком элементе находится количество магнитной энергии, пропорциональное квадрату напряженности поля в данном элементе объема. Энергия всего магнитного поля получается, если проинтегрировать ее значение для всех элементов объема того пространства, в котором имеется поле. В итоге аналогично энергии электрического поля энергия магнитного поля выражается формулой

$$W=\int\frac{\mu H^2}{8\pi}dv. \tag{10}$$

Но что представляет собой магнитное поле и за счет чего создается его энергия?

Магнитное поле является одним из неотъемлемых проявлений электрического тока. Вместе с возникновением тока возникает магнитное поле, и оно неизбежно уничтожается при прекращении тока.

Процесс трансформации энергии электрического тока в энергию магнитного поля глубоко отличен от процессов преобразования электрической энергии в другие виды энергии. Действительно, мы можем по желанию увеличить или уменьшить, замедлить или ускорить переход энергии электрического тока в теплоту или химическую энергию, изменяя сопротивление проводников выбором произвольно малого или большого поперечного сечения, варьируя их длину, включая в цепь электролиты и т. д. Мы можем избежать преобразования электрической энергии в механическую, закрепив неподвижно все проводники, образующие электрическую цепь; но мы не в состоянии предотвратить трансформацию энергии тока в период его возникновения в энергию магнитного поля. Магнитное поле является неразлучным спутником электрического тока.

Стационарному (постоянному) току соответствует статическое состояние магнитного поля. Изменение величины тока неизбежно влечет за собой изменение напряженности магнитного поля, и обратно: любое нарушение статического состояния магнитного поля, связанное, например, с перемещением магнитов, с движением посторонних проводников, окруженных собственным магнитным полем, или с изменением величины тока в этих проводниках, немедленно отражается на величине тока в основной цепи. *В этой сопряженности магнитного поля и тока друг с другом и заключается физическая сущность явления электромагнитной индукции и, в частности, самоиндукции.*

Стальные, или постоянные, магниты, сохраняющие свои поля как бы независимо от движения электричества, в действительности, как уже говорилось, представляют собой лишь более сложный случай, подтверждающий эту неразрывную связь магнитного поля и движения электричества: их магнитные поля обусловлены вращением электронов внутри атомов ферромагнетиков.

Факт неразрывного существования магнитного поля и движения электричества побуждает думать, что *энергия магнитного поля представляет собой не что иное, как энергию движения электричества,* или так называемую *электрокинетическую энергию.*

Когда мы включаем ток в проводе или в системе проводов, то в момент включения создается магнитное поле; оно нарастает на протяжении короткого, однако вполне измеримого промежутка времени. В течение того же промежутка времени и скорость урегулированного (преобладающего) движения электронов в направлении тока возрастает от нуля до той скорости, которая соответствует току установившейся величины I, т. е. стационарному току, напряжение которого мы определяем, основываясь на законе Ома: $U=IR$.

Когда в цепь включается какой-нибудь проводник с сопротивлением R, то под действием разности потенциалов заряды (например, электроны), находящиеся внутри провода, приобретают преобладающее движение в направлении действующих на них электрических сил. При этом создается магнитное поле, являющееся наглядным выражением приобретенной этими зарядами электрокинетической энергии урегулированного движения. Положим, что через t секунд (или долей секунды) ток достиг такой величины, когда оказываемое проводником сопротивление движению электронов становится равным действующей на них силе, находящейся в зависимости от разности потенциалов U на концах проводника. Теперь электроны приобрели запас электрокинетической энергии, который в среднем уже не будет изменяться, так как ток останется постоянным. Вся работа, совершаемая током, теперь нацело будет превращаться в тепло, количество которого, выделяемое ежесекундно, пропорционально мощности тока UI.

До наступления этого момента, пока магнитное поле и движение зарядов еще не достигли своего стационарного состояния, работа тока расходовалась: 1) на тепло и 2) на увеличение электрокинетической энергии потока электронов в проводе, т. е. на создание магнитного поля тока.

Работа тока, расходуемая на создание магнитного поля, направлена на преодоление электродвижущей силы самоиндукции $\mathscr{E}$. Если величина тока в данный момент есть I, то мощность тока, расходуемая на преодоление электродвижущей силы самоиндукции, будет $\mathscr{E}I$, а работа тока, превращающаяся за дифференциально малый промежуток времени dt в энергию магнитного поля dW, будет равна $\mathscr{E}Idt$.

Воспользовавшись формулой (7), определяющей величину электродвижущей силы самоиндукции (умножив обе части этой формулы на $I\,dt$), находим, что

$$\mathscr{E}I\,dt=LI\,dI,$$

следовательно,

$$dW=LI\,dI.$$

Запас энергии W магнитного поля тока равен работе, израсходованной током на преодоление электродвижущей силы самоиндукции за весь тот промежуток времени, пока ток возрастает от нуля до некоторого стационарного значения. Значит,

$$W=\int_0^I LI\,dI,$$

откуда

$$W=\frac{LI^2}{2}. \tag{11}$$

Здесь, если I выражено в амперах, а L в генри, то энергия получается выраженной в джоулях; если же I выражено в единицах CGSM, а L в сантиметрах, то энергия получается выраженной в эргах.

Эта формула является одной из важнейших формул электродинамики. Она равносильна формуле (10) [когда формула (10) применяется к вычислению энергии поля уединенного тока], но в сравнении с формулой (10) формула (11) имеет преимущество простоты.

Выражение $\frac{1}{2}LI^2$ является особенно наглядным, так как оно совпадает по форме с выражениями $\frac{1}{2}mv^2$ для кинетической энергии поступательного движения и $\frac{1}{2}I\omega^2$ для кинетической энергии вращательного движения.

Величина тока является обобщенной скоростью движения электричества (§ 25); в самоиндукции проявляется инерция тока; мы вправе поэтому рассматривать формулу (11) как прямое указание на *единство магнитной и электрокинетической энергии.*

Когда проводник имеет форму компактной *катушки*, пронизываемой Φ линиями магнитной индукции, то каждая линия магнитной индукции столько раз охватывает контур проводника, каково число витков n в катушке. Это равносильно тому, что контур проводника охватывается по одному разу $n\Phi$ линиями магнитной индукции.

Сопоставляя формулу потока магнитной индукции (когда L измерено в генри, I в амперах, а Φ в максвеллах)

$$n\Phi=LI\cdot 10^8$$

с формулой Гопкинсона (§ 62)

$$\Phi=\frac{4\pi}{10}\,\frac{In}{\frac{l}{\mu S}+\frac{l_0}{\mu_0 S_0}},$$

находим *коэффициент самоиндукции* (*индуктивность*) *электромагнита*:

$$L=4\pi\,\frac{n^2}{\frac{l}{\mu S}+\frac{l_0}{\mu_0 S_0}}\cdot 10^{-9}\ \text{генри}. \tag{12}$$

Здесь l — длина магнитной цепи в железе, l_0 — длина воздушного зазора, S и S_0 — поперечные сечения (эти величины должны быть выражены в сантиметрах); μ есть магнитная проницаемость материала сердечника (при заданной величине тока), $\mu_0 \approx 1$, n — число витков.

При пользовании этой формулой не следует забывать, что μ зависит от напряженности поля (§ 63), а поэтому для различных величин тока коэффициент самоиндукции тоже будет различным.

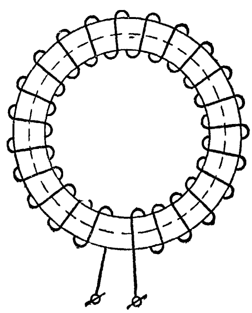

Рис. 317. Тороид

Для электромагнита, полюсы которого замкнуты железным якорем, точнее — для *тороида* (рис. 317), приведенная формула упрощается ($l_0=0$):

$$L=4\pi\frac{\mu n^2 S}{l}\cdot 10^{-9} \text{ генри.} \tag{13}$$

Мы видим отсюда, что индуктивность действительно имеет размерность длины, умноженной на магнитную проницаемость.

Зная индуктивность электромагнита, мы легко можем вычислить его энергию по формуле (11):

$$W=\frac{LI^2}{2}.$$

Заменив в этой формуле произведение LI через поток магнитной индукции Φ, выраженный в максвеллах, из (5) или из (6), получим:

$$\left.\begin{aligned} &W=n\frac{\Phi I}{2} \text{ эргов (если } I \text{ выражено в единицах CGSM),}\\ &W=n\frac{\Phi I}{2}\cdot 10^{-8} \text{ джоулей (если } I \text{ выражено в амперах).}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

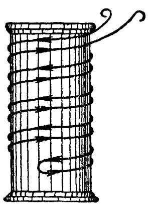

Рис. 318 Безындукционная двухнитная («бифилярная») обмотка.

Заметим, что обмотку катушки проводом можно осуществить и так, что индуктивность катушки, несмотря на большое число витков, будет близкой к нулю. Для этого провод складывают вдвое и осуществляют обмотку, как показано на рис. 318. Благодаря противоположному направлению тока в смежных витках создаваемые этими витками магнитные поля взаимно почти уничтожаются.

Вычисление индуктивности проводников в общем случае сопряжено со значительными математическими трудностями. При вычислении индуктивности электромагнита мы воспользовались найденным ранее выражением для магнитного потока, что сразу и привело нас к решению задачи. В большинстве случаев при вычислении индуктивности приходится исходить из уравнения (10) для магнитной энергии тока и, проведя интегрирование, сопоставлять результат с выражением энергии тока через индуктивность, т. е. с формулой (11). Поясним этот метод расчета на простейшем примере.

Вычислим индуктивность кабеля, состоящего из двух коаксиальных цилиндров (рис. 319), по которым ток равной величины идет в противоположных направлениях. Заметим, что когда ток протекает по полому цилиндру (с равномерной по окружности цилиндра плотностью), то магнитное поле тока внутри цилиндра равно нулю, а вне цилиндра оно таково же, как поле тока той же величины, идущего по оси цилиндра. Это следует из соображений симметрии и из выражения для магнитодвижущей силы: $\mathcal{M}=4\pi I$. Действительно, для любого замкнутого контура, который не охватывает тока (например, для окружности, проведенной вокруг оси цилиндра в плоскости, перпендикулярной к оси и имеющей радиус r меньший, чем радиус R цилиндра), магнитодвижущая сила равна нулю; но $\mathcal{M}=2\pi r\cdot H_{\text{внутр}}$ и, стало быть, поскольку $\mathcal{M}=0$, то и $H_{\text{внутр}}=0$. Из выражения магнитодвижущей силы для окружности, охватывающей цилиндр (когда $r>R$): $\mathcal{M}=2\pi r\cdot H_{\text{внешн}}=4\pi I$, находим, что $H_{\text{внешн}}=\frac{2I}{r}$.

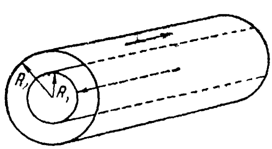

Рис. 319. Кабель из двух коаксиальных цилиндров

Таким образом, в интересующем нас случае все магнитное поле равных и противоположных токов сосредоточивается в пространстве между коаксиальными цилиндрами и создается здесь током, идущим по внутреннему цилиндру (по сказанному выше поле обоих токов внутри меньшего цилиндра равно нулю, а вне большего цилиндра поля противоположно направленных токов взаимно уничтожаются). Следовательно, в рассматриваемом случае, разбив весь объем между цилиндрами на бесконечно тонкие слои $dv=2\pi rl\,dr$, для энергии токов мы получаем выражение, которое легко интегрируется:

$$W=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu H^2}{8\pi}dv=\frac{\mu l}{8\pi}\int_{R_1}^{R_2}H^2 2\pi r dr=$$

$$=\frac{\mu l}{4}\int_{R_1}^{R_2}\frac{4I^2}{r^2}r dr=\mu l I^2\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}=\mu l I^2\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Сопоставляя найденную величину энергии магнитного поля токов с выражением энергии тока через индуктивность $W=\frac{LI^2}{2}$, получаем формулу для *индуктивности* кабеля длиной l, состоящего из двух коаксиальных цилиндров с радиусами R_1 и R_2:

$$L=2\mu l\ln\frac{R_2}{R_1}. \tag{15}$$

Аналогичные вычисления для случая двух параллельных проводников длиной l с радиусом сечения r, удаленных друг от друга на расстояние a ($a\gg r$), дают для величины индуктивности двухпроводной линии:

$$L=4\mu l\ln\frac{a}{r}.$$

Для индуктивности круглой петли провода при радиусе петли R и радиусе сечения провода r получается:

$$L=4\pi\mu R\left[\ln\frac{8R}{r}-2\right].$$

При n оборотах провода индуктивность кольцевой катушки в n^2 раз превышает индуктивность круглой петли.

Индуктивность соленоида длиной l при n витках провода с радиусом витков R (и площадью сечения соленоида $S=\pi R^2$) равна

$$L=4\pi\mu\frac{n^2S}{l^2}\left[\sqrt{l^2+R^2}-R\right].$$

Индуктивность одиночного провода длиной l, имеющего радиус сечения r и расположенного на высоте h над землей:

$$L=2\mu l\ln\frac{2h}{r}.$$

Приведенные формулы определяют индуктивность в сантиметрах, если в сантиметрах выражены l, r, R, h и другие величины.

§ 75. Взаимная индуктивность. Энергия взаимодействия токов. Коэффициент взаимной индукции катушек с общим сердечником

Подобно тому как явление самоиндукции количественно характеризуется индуктивностью L цепи, явление *взаимной индукции* контуров (§ 70, рис. 300 и 301) определяется *взаимной индуктивностью* M проводящих цепей. Под величиной взаимной индуктивности или *коэффициента взаимоиндукции* M контуров *1* и *2* понимают *общий для этих контуров поток магнитной индукции* (т. е. число тех линий магнитной индукции, которые пронизывают площади, ограниченные обоими контурами), *когда в одном из контуров протекает ток, равный единице* (рис. 320). Поскольку напряженность магнитного поля в любой точке пропорциональна величине тока, создающего поле, то и магнитный поток Φ_1, создаваемый током I_1, который протекает в контуре *1*, пропорционален току I_1 [причем коэффициент пропорциональности согласно формуле (5) представляет собой индуктивность L_1 контура *1*]. Часть $\Phi_{1,2}$ упомянутого магнитного потока, пронизывающая контур *2*, очевидно, также пропорциональна току I_1:

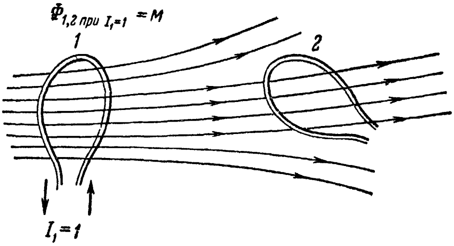

Рис 320 Взаимная индуктивность проводников измеряется общим потоком магнитной индукции, который создается током $I_1=1$ в одном из проводников и пронизывает площади, ограниченные контурами обоих проводников.

$$\Phi_{1,2}=M_{1,2}I_1,$$

причем коэффициент пропорциональности $M_{1,2}$ представляет собой взаимную индуктивность контуров *1* и *2* ($M_{1,2}=\Phi_{1,2\,\text{при}\,I_1=1}$).