

При  $n$  оборотах провода индуктивность кольцевой катушки в  $n^2$  раз превышает индуктивность круглой петли.

Индуктивность соленоида длиной  $l$  при  $n$  витках провода с радиусом витков  $R$  (и площадью сечения соленоида  $S=\pi R^2$ ) равна

$$L = 4\pi\mu \frac{n^2 S}{l} [\sqrt{l^2 + R^2} - R].$$

Индуктивность одиночного провода длиной  $l$ , имеющего радиус сечения  $r$  и расположенного на высоте  $h$  над землей:

$$L = 2\mu l \ln \frac{2h}{r}.$$

Приведенные формулы определяют индуктивность в сантиметрах, если в сантиметрах выражены  $l$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $h$  и другие величины.

### § 75. Взаимная индуктивность. Энергия взаимодействия токов. Коэффициент взаимной индукции катушек с общим сердечником

Подобно тому как явление самоиндукции количественно характеризуется индуктивностью  $L$  цепи, явление *взаимной индукции* контуров (§ 70, рис. 300 и 301) определяется *взаимной индуктивностью*  $M$  проводящих цепей. Под величиной взаимной индуктивности или *коэффициента взаимной индукции*  $M$  контуров 1 и 2 понимают *поток магнитной индукции* (т. е. число тех линий магнитной индукции, которые пронизывают площади, ограниченные обоими контурами), *когда в одном из контуров протекает ток, равный единице* (рис. 320). Поскольку напряженность магнитного поля в любой точке пропорциональна величине тока, создающего поле, то и магнитный поток  $\Phi_{1,2}$ , создаваемый током  $I_1$ , который протекает в контуре 1, пропорционален току  $I_1$  [причем коэффициент пропорциональности согласно формуле (5) представляет собой индуктивность  $L_1$  контура 1]. Часть  $\Phi_{1,2}$  упомянутого магнитного потока, пронизывающая контур 2, очевидно, также пропорциональна току  $I_1$ :

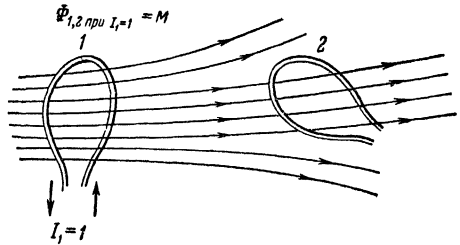


Рис. 320 Взаимная индуктивность проводников измеряется общим потоком магнитной индукции, который создается током  $I_1=1$  в одном из проводников и пронизывает площади, ограниченные контурами обоих проводников.

$$\Phi_{1,2} = M_{1,2} I_1,$$

причем коэффициент пропорциональности  $M_{1,2}$  представляет собой взаимную индуктивность контуров 1 и 2 ( $M_{1,2} = \Phi_{1,2}$  при  $I_1=1$ ).

Поскольку через контур 2 проходит ток  $I_2$ , то для величины общего магнитного потока, создаваемого током  $I_2$  и пронизывающего контур 1, рассуждая аналогично, мы можем написать выражение

$$\Phi_{2,1} = M_{2,1} I_2.$$

Нетрудно доказать, что коэффициент пропорциональности в этой формуле тождествен коэффициенту пропорциональности в предыдущей формуле, т. е. представляет собой ту же самую *взаимную индуктивность* контуров:  $M_{2,1} = M_{1,2}$ . Чтобы убедиться в этом, определим работу, которая может быть совершена силами магнитного поля при сближении контуров из бесконечности до рассматриваемого положения. Эта работа, как мы знаем (§ 66), равна произведению величины тока в контуре на приращение магнитного потока, пронизывающего этот контур. Если первый контур с током  $I_1$  мы оставляем неподвижным и в магнитном поле, которое создается током  $I_1$ , приближаем до заданного положения второй контур с током  $I_2$ , то, учитывая, что магнитный поток, пронизывающий контур 2, увеличивается от нуля до  $\Phi_{1,2}$ , для работы, совершаемой силами поля, получаем выражение

$$W_{1,2} = I_2 \Phi_{1,2} = I_2 M_{1,2} I_1.$$

Очевидно, что *ту же работу* мы получим, если неподвижным будет оставаться второй контур с током  $I_2$ , а приближать мы будем первый контур с током  $I_1$ . Поскольку магнитный поток, пронизывающий приближаемый первый контур и создаваемый током  $I_2$ , увеличивается от нуля до  $\Phi_{2,1}$ , то работа будет равна

$$W_{1,2} = I_1 \Phi_{2,1} = I_1 M_{2,1} I_2.$$

Сопоставляя два полученных выражения для работы сближения контуров, обтекаемых токами  $I_1$  и  $I_2$ , мы убеждаемся, что

$$M_{1,2} = M_{2,1} = M.$$

Этим оправдывается приведенное выше определение взаимной индуктивности, в котором не было оговорено, какой из контуров мы считаем имеющим ток  $I = 1$ .

Если взаимная индуктивность контуров измерена не в абсолютных единицах — сантиметрах, а в генри и ток в амперах, но величина  $\Phi$  по-прежнему выражена в максвеллах, то в соответствии с преобразованием формулы (5) в (6)

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} \Phi_{1,2} &= M I_1 \cdot 10^8 \\ \Phi_{2,1} &= M I_2 \cdot 10^8 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

[Числовой коэффициент здесь, как и в формуле (6), становится равным единице, если магнитный поток измерять в вольт-секундах (веберах).]

При изменении тока  $I_1$  в одном из контуров во втором контуре согласно закону Фарадея индуцируется электродвижущая сила

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d\Phi_{1,2}}{dt} \cdot 10^{-8} = - M \frac{dI_1}{dt} \text{ вольт,} \quad (17)$$

где  $M$  выражено в генри и  $I$  в амперах.

Аналогично, когда изменяется ток  $I_2$ , то в первом контуре индуцируется электродвижущая сила

$$\mathcal{E}_1 = - \frac{d\Phi_{2,1}}{dt} \cdot 10^{-8} = - M \frac{dI_2}{dt} \text{ вольт.} \quad (17')$$

Из этих формул следует, что *взаимная индуктивность двух проводников равна электродвижущей силе, которая индуцируется в одном из проводников, когда ток в другом проводнике изменяется на единицу величины в 1 секунду.*

Согласно сказанному выше *энергия взаимодействия токов  $I_1$  и  $I_2$*  (т. е. работа, которая может быть совершена силами магнитного поля токов при удалении проводников с токами  $I_1$  и  $I_2 = \text{const}$  из рассматриваемого положения в бесконечность) равна

$$W_{1,2} = M I_1 I_2. \quad (18)$$

Если  $M$  выражено в сантиметрах, а величины токов в абсолютных магнитных единицах, то энергия взаимодействия токов получается выраженной в эргах. Когда взаимная индуктивность выражена в генри, а величины токов в амперах, то формула (18) дает значение  $W_{1,2}$  в джоулях.

Очевидно, что *полная энергия магнитного поля двух токов равна*

$$W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2. \quad (19)$$

В заключение подсчитаем *взаимную индуктивность катушек, имеющих общий ферромагнитный тороидальный сердечник* (рис. 321). В этом случае почти весь (приближенно мы будем считать, что весь) магнитный поток, создаваемый током в первой катушке, пронизывает вторую катушку. Если  $L_1$  — индуктивность (в генри) первой катушки и  $n_1$  — число витков в ней, то магнитный поток в сердечнике  $\Phi$  при величине тока в первой катушке  $I_1$  ампер, умноженный на число, показывающее, сколько раз каждая линия индукции охватывает линию тока  $I_1$ , т. е. на  $n_1$ , равен

$$n_1 \Phi = L_1 I_1 \cdot 10^8.$$

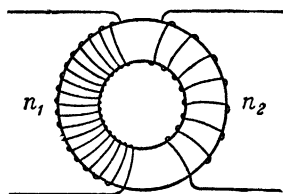


Рис. 321 К вычислению взаимной индуктивности катушек без учета «магнитной утечки».

Каждая из  $\Phi$  линий магнитного потока в сердечнике  $n_2$  раз охватывает провод второй катушки (где  $n_2$  — число витков в ней); это равносильно тому, что  $n_2\Phi$  линий индукции по одному разу охватывают контур второго проводника. Таким образом,

$$\Phi_{1,2} = n_2\Phi = n_2 \frac{L_1 I_1}{n_1} \cdot 10^9.$$

Сопоставляя это выражение с (16), находим коэффициент взаимной индукции двух катушек, имеющих общий сердечник:

$$M = n_2 \cdot \frac{L_1}{n_1},$$

или, принимая во внимание (13),

$$M = 4\pi \frac{\mu n_1 n_2 S}{l} \cdot 10^{-9} \text{ генри,} \quad (20)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения сердечника и  $l$  — его длина.

## § 76. Уравнения Максвелла и уравнения Лорентца

Обобщение всех основных законов электродинамики было осуществлено в 60-х годах прошлого столетия Максвеллом. Максвелл выразил в математической форме картину электромагнитного поля, разработанную Фарадеем (и уже поясненную нами в ряде параграфов: 16, 18, 58, 65, 71).

Свойства электрического поля и поля магнитов определяются, как мы видели, теоремой Остроградского — Гаусса (§§ 5, 6, 7, 58). Свойства электромагнитного поля определяются законами Био и Савара (§ 61) и Фарадея (§ 72).

Фарадеев закон электромагнитной индукции и закон Био и Савара можно сформулировать так, что вскроется глубокое математическое сходство этих законов.

Сделаем нижеследующее соглашение: число «входящих» в замкнутый контур линий индукции, т. е. пересекающих замкнутый контур в направлении извне, будем обозначать как число положительное; число «выходящих» из замкнутого контура линий индукции, т. е. пересекающих замкнутый контур в направлении изнутри, будем обозначать как число отрицательное. Тогда закон Фарадея можно сформулировать так: *выраженная в вольтах электродвижущая сила, индуцируемая магнитным полем, равна одной сто-миллионной части алгебраического числа линий магнитной индукции (т. е. магнитного потока в максвеллах), пересекаемых контуром в одну секунду.* Точнее,

$$\mathcal{E} = -n \frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8} \text{ вольт,}$$

где  $d\Phi$  означает алгебраическое число линий магнитной индукции.