рии Лорентца преобразуются в нижеследующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\bar{e} &= 4\pi\bar{\rho}, \\ \operatorname{div}\bar{h} &= 0, \\ \operatorname{rot}\bar{e} &= -\frac{1}{\partial}\frac{\partial\bar{h}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\bar{h} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\bar{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\overline{\rho v}, \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

где $\frac{1}{c}\overline{\rho v}$ представляет собой плотность электрического тока (ρ — плотность зарядов и v — скорость их движения).

§ 77. Электромагнитное происхождение массы электрона

О массе тела, т. е. о *количестве материи*, мы судим по величине того сопротивления (той инертности), которое тело оказывает, когда мы хотим изменить скорость его движения. Механика Ньютона учит нас, что величина этого сопротивления не зависит от того, находилось ли раньше тело в покое или двигалось. Механика Ньютона утверждает, что при любой скорости движения инертность тела (т. е. величина сопротивления, которое нужно преодолеть, чтобы, воздействуя на тело в течение 1 сек., увеличить скорость тела на 1 *см/сек*) одинакова для всевозможных направлений силы и одинакова для любых скоростей. Именно этот факт мы и хотим констатировать, когда говорим, что инертность (и масса) тела инвариантна (неизменна) по отношению к состояниям движения.

Инертность тела может быть обусловлена или свойствами самого тела, или свойствами среды, в которой оно движется. В связи с этим мы отличаем «истинную массу» от «кажущейся массы» тела. Сопротивление, которое оказывает тело попыткам изменить скорость его движения в вязкой среде, значительно больше истинной инертности тела, так как в этом случае, сообщая телу ускорение, мы должны одновременно привести в движение значительные массы окружающей среды. Общеизвестно, насколько затруднены и замедлены движения человека в воде. Из опыта установлено, что пузырек воздуха объемом 1 *см*^{3} в воде имеет инертность, равную приблизительно $\frac{1}{2}$ *г*; вместе с тем истинная масса воздуха, заключенного внутри такого пузырька, представляет собой величину порядка одной тысячной доли грамма.

Любое тело мы можем представить себе движущимся вне той среды, которая обусловливает кажущееся нарастание его массы. С этой точки зрения мы правы, когда рассматриваем кажущуюся массу как внешнее свойство тела в отличие от действительной массы, составляющей его неотъемлемое свойство. Но если благодаря своеобразной взаимосвязи тела и среды невозможно представить себе движение этого тела вне среды, обусловливающей нарастание его массы, то в этом случае было бы нелогично рассматривать кажущуюся массу как какое-то внешнее свойство тела, противопоставляя ее истинной массе.

По существу, именно этот случай мы и имеем при движении электрически заряженного тела.

Движение электрически заряженного тела всегда сопровождается возникновением магнитного поля.

Нетрудно понять, почему магнитное поле, возникающее при движении заряженного тела, сообщает телу дополнительную инертность: на создание поля необходимо затратить работу. При затормаживании заряженного тела энергия магнитного поля преобразуется в работу, направленную против затормаживающих сил. Магнитное поле, образованное движущимся зарядом, создает, таким образом, инертность заряда.

По отношению к движущемуся заряду электромагнитное поле играет роль среды, которая принципиально неотделима от движущегося заряда. Чем больше скорость движения заряда, тем интенсивнее образуемое движущимся зарядом магнитное поле, а следовательно, тем больше создаваемая полем инертность заряда.

Ускорение может быть сообщено заряду, например электрону, внешним (т. е. извне приложенным) электрическим полем. Тогда масса, присущая ускоряемому электрону, будет представлять собой количество материи, возрастающее при увеличении скорости движения электрона за счет материи ускоряющего поля (т. е. насколько возрастет масса электрона, настолько уменьшится масса ускорившего его поля).

Те же мысли можно сформулировать и так: *материальная основа магнитного поля, возникающего при движении электрона (а также и электрического поля, связанного с зарядом электрона), неотделима от электрона.*

При ускорении электрон приобретает дополнительную массу от ускоряющего этот электрон поля, при торможении он отдает ранее приобретенную дополнительную массу тормозящему полю.

Инертность электрона, обусловленную его электромагнитным полем, можно вычислить (с некоторым приближением) теоретически. Поясним сущность такого расчета и затруднения, которые при этом обнаруживаются.

Если движущийся заряд рассматривать как элемент тока, то величина этого элемента тока должна считаться пропорциональной величине заряда и скорости его движения. В соответствии с этим напряженность магнитного поля, создаваемого движущимся зарядом, пропорциональна произведению заряда на скорость его перемещения. Энергия магнитного поля в единице объема (для поля в вакууме) равна, как мы знаем, $\frac{H^2}{8\pi}$. Поэтому *суммарная энергия магнитного поля движущегося заряда пропорциональна* (*при не слишком больших скоростях*) *квадрату заряда и квадрату скорости.*

Допустим, что помимо массы электромагнитного происхождения электрон имеет еще массу какого-то иного происхождения. Соответствует это допущение истине или нет,— к обсуждению этого вопроса мы вернемся позже. Обозначим эту особую неэлектромагнитную массу буквой μ. Незаряженная частица с массой μ, движущаяся со скоростью v, имела бы кинетическую энергию $\mu\frac{v^2}{2}$. Магнитное поле движущегося заряженного тела существенно зависит от размеров тела и от того, каким образом распределены заряды внутри тела. Если движущееся тело представляет собой сферу радиуса a, заряженную количеством электричества e, которое сосредоточено на поверхности сферы, то энергия электромагнитного поля такого тела, движущегося с относительно небольшой скоростью v, приближенно равна $W_m \approx \frac{e^2}{3a}\frac{v^2}{c^2}$.

Таким образом, общая энергия электрона, если предполагать, что электрон сферичен и заряд его равномерно распределен по поверхности сферы, равна

$$W=\mu\frac{v^2}{2}+\frac{e^2}{3a}\frac{v^2}{c^2}=\left(\mu+\frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2}\right)\frac{v^2}{2}.$$

Нетрудно видеть, что выражение, заключенное в скобки, играет роль массы *покоящегося электрона* (или движущегося с небольшой скоростью):

$$m\approx\mu+\frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2}. \qquad (36)$$

Если бы мы исходили из гипотезы, что заряд электрона не сосредоточен на его поверхности, а равномерно распределен по всему его объему, то получили бы для *электромагнитной массы* электрона не величину $\frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2}$, а аналогичное выражение, умноженное на 4/5 вместо 2/3.

При больших скоростях энергия магнитного поля возрастает быстрее квадрата скорости. Поэтому *инертность заряда, обусловленная магнитным полем, не является величиной постоянной, но возрастает со скоростью движения.* Чем больше скорость, тем значительнее воздействие магнитного поля на электрон, тем устойчивее его движение. Инертность электромагнитного происхождения имеет наименьшее значение тогда, когда заряд покоится. Однако и в этом случае она не равна нулю, так как для того, чтобы привести покоившийся ранее заряд в движение, уже надо затратить работу на образование магнитного поля.

Приближенная формула (36) показывает, что электромагнитная масса электрона, так же как и всякого вообще шарообразного заряженного тела, тем больше, чем меньше его радиус. Если бы мы захотели экспериментально обнаружить инертность электромагнитного происхождения, изучая движение заряженных шариков, нам это, несмотря на исключительную точность современного лабораторного опыта, безусловно не удалось бы. Действительно, по формуле (36) шарик радиусом 1 *см* (его емкость равна 1 *см* в абсолютных электростатических единицах), заряженный до потенциала в 1 000 000 *в*, имеет массу, обусловленную электромагнитным полем, равную

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2}=\frac{2}{3}\left(\frac{10^6}{300}\right)^2\frac{1}{(3\cdot 10^{10})^2}\approx 10^{-13}\ \textit{г}.$$

Допустим, что вся масса электрона — электромагнитного происхождения, т. е. что $\mu=0$; в таком случае формула (36) позволяет вычислить радиус электрона. Действительно, поскольку масса электрона в 1836 раз меньше массы водородного атома, то, следовательно, она равна частному от деления 1 *г* на число Авогадро и на 1836, что дает $m\approx 9\cdot 10^{-28}$ *г*. Отсюда

$$a=\frac{2}{3}\cdot\frac{e^2}{c^2}\cdot\frac{1}{m}=\frac{2}{3}\left(\frac{4{,}8\cdot 10^{-10}}{3\cdot 10^{10}}\right)^2\frac{1}{9\cdot 10^{-28}}\approx 2\cdot 10^{-13}\ \textit{см}.$$

Это соотношение указывает, что радиус электрона в 100 000 раз меньше радиуса атома (радиус атома — величина порядка 10^{-8} *см*).

В поясненный выше приближенный расчет электромагнитной массы электрона мы ввели три предположения, которые в строгом расчете не могут быть допущены.

Во-первых, мы приняли, что энергия магнитного поля движущегося электрона выражается простой формулой $W_m\approx\frac{e^2}{3a}\left(\frac{v}{c}\right)^2$. В действительности зависимость энергии магнитного поля электрона от скорости его движения выражается более сложным законом. Закон этот может быть написан в виде бесконечного ряда, в котором принятое нами выражение $\frac{e^2}{3a}\left(\frac{v}{c}\right)^2$ играет роль первого члена, причем все остальные члены ряда содержат более высокие степени отношения $\frac{v}{c}$. При скоростях, малых в сравнении со скоростью света, когда отношение $\frac{v}{c}$ значительно меньше единицы, сумма всех последующих членов ряда составляет незначительную величину, которой можно пренебречь в сравнении с первым членом ряда.

Во-вторых, мы не учли важной особенности инертности электрона, а именно, зависимости инертности от направления. Мы молчаливо предполагали, что инертность электрона не зависит от н а п р а в л е н и я ускорения, т. е. допустили, что устойчивость движения электрона в отношении численного значения скорости и устойчивость его в отношении прямолинейности траектории одинаковы. В действительности это не так. Оказывается, что при скорости движения электрона, близкой к скорости света, легче сообщить электрону боковое ускорение (т. е. нарушить прямолинейность его движения), чем увеличить численное значение скорости в направлении его пути.

Первый закон ньютоновой механики гласит, что всякое тело, предоставленное самому себе, удерживает состояние равномерного прямолинейного движения. Воздействие сил сказывается или в том, что скорость тела изменяется по величине, или в том, что нарушается прямолинейность его траектории. Уже в этой классической формулировке первого закона механики можно видеть намек на двойственность инертности. С одной стороны, масса обусловливает устойчивость скорости движения, с другой,— она определяет прямолинейность траектории. В связи с этим мы могли бы говорить об инертности продольной и об инертности поперечной. Под продольной инертностью мы должны были бы в таком случае подразумевать то сопротивление, которое тело оказывает, когда мы хотим сообщить телу дополнительное ускорение в направлении его пути; под поперечной инертностью мы должны были бы подразумевать сопротивление, которое тело оказывает при попытке изменить направление его движения. Однако в классической механике, когда речь идет о движении незаряженных тел, такое расчленение инертности тела на продольную и поперечную хотя и было бы логично, но не могло бы принести никакой пользы, так как второй закон механики Ньютона устанавливает, что инертность тела для всевозможных углов между скоростью и ускорением численно одинакова. То же самое имеет место и для электрона при малых скоростях движения. Но при больших скоростях сопротивление, которое оказывает электрон, когда ему сообщается ускорение в направлении пути, не равно сопротивлению, которое при той же скорости движения оказывает электрон, когда ему сообщается ускорение в направлении, перпендикулярном к направлению движения. Легче искривить траекторию быстро летящего электрона, чем численно увеличить скорость его движения. Поэтому в динамике электрона разграничение продольной и поперечной инертности является существенно необходимым. Однако, как будет показано ниже, это разграничение должно быть заранее предусмотрено только в том случае, когда для определения силы применяется уравнение $f = m\frac{dv}{dt}$, а не уравнение $f = \frac{d(mv)}{dt}$.

Третье упрощение, которое было сделано в поясненном выше расчете массы электрона, заключалось в том, что мы игнорировали возможную изменчивость формы электрона. Электромагнитное поле, вызванное электроном, воздействует на электрон, когда мы хотим изменить скорость и направление его движения. Возникает вопрос, не существует ли это воздействие постоянно, в частности и тогда, когда электрон движется прямолинейно и равномерно, и не сводится ли в этом случае воздействие поля на электрон к стационарной деформации поверхности электрона. Здесь не представляется возможным излагать все те соображения, которые связаны с этим вопросом. Во всяком случае следует отметить, что если бы формулы электродинамики и данные опыта привели нас к выводу, что электромагнитное поле действительно деформирует электрон, то было бы несправедливо рассматривать этот вывод как неожиданный и непонятный.

Впервые строгий расчет зависимости продольной и поперечной инертности электрона от скорости его движения и от величины его заряда был выполнен в 1902 г. Абрагамом. Абрагам исходил из гипотезы сферического распределения заряда и предполагал, что форма электрона при его движении не изменяется.

Несколько позже Лоренц вычислил массу электрона, исходя из иной гипотезы, а именно, Лоренц предположил, что движение электрона сопровождается его сплющиванием в направлении движения, причем размеры электрона в направлении, перпендикулярном к движению, остаются неизменными, радиус же электрона в направлении движения уменьшается пропорционально $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, где v—скорость движения электрона, а c—скорость света.

Гипотеза деформируемого электрона возникла как один из способов истолкования причин отрицательного результата опытов Майкельсона (т. III, § 4). Задача опытов Майкельсона, впервые поставленных в 1881 г. и позднее продолженных Морлеем и Миллером, состояла в том, чтобы с помощью спектральных методов установить скорость движения Земли по отношению к мировому эфиру. Анализ опытов Майкельсона привел Эйнштейна к теории относительности. Выводы теории относительности применительно к законам, определяющим зависимость массы электрона от скорости, совпадают с выводами Лорентца.

Формулы, полученные Лорентцом и Эйнштейном для зависимости поперечной $m_\perp$ и продольной $m_\parallel$ инертности электрона от скорости v, имеют следующий вид:

$$m_\perp = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{37}$$

$$m_\parallel = \frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}}, \tag{38}$$

где m_0—масса покоящегося электрона.

Если правую часть этих формул разложить в ряд Тейлора, то получим:

$$m_\perp = m_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\frac{15}{16}\frac{v^6}{c^6}+\ldots\right),$$

$$m_\parallel = m_0\left(1+\frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{15}{8}\frac{v^4}{c^4}+\frac{35}{16}\frac{v^6}{c^6}+\ldots\right).$$

Экспериментальные данные подтвердили выводы Лорентца и Эйнштейна; формулы, выведенные Абрагамом на основе гипотезы недеформируемого электрона, с опытными данными не согласуются.

Зависимость массы электрона от скорости опытным путем была впервые изучена Кауфманом (1899—1906). Кауфман измерял отклонение β-лучей радия (потока электронов) в магнитном и электрическом полях. По величине отклонения электронов от прямолинейного пути, зная напряженности магнитного и электрического полей, нетрудно вычислить [по формулам (11) и (12) § 67] поперечную инертность электрона. Измерения Кауфмана носили качественный характер и не могли с достаточной отчетливостью указать, каким формулам, формулам Лорентца—Эйнштейна или формулам Абрагама, следует отдать предпочтение.

В 1909 г. были опубликованы новые точные исследования Бухерера, повторенные еще с большей точностью в 1914 г. Нейманом. Бухерер, так же как и Кауфман, изучал отклонение β-лучей радия в магнитном и электрическом полях. Эти измерения с несомненностью установили, что инертность электрона изменяется в зависимости от скорости в точности по закону Лорентца—Эйнштейна (37). Если бы какая-то часть массы электрона m_2^0 тела не зависела от скорости, то тогда зависимость суммарной поперечной инертности электрона от скорости должна была бы определяться формулой

$$m_\perp = \frac{m_1^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_2^0,$$

из которой следует, что в этом случае произведение измеренной инертности $m_\perp$ на $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ не было бы величиной, одинаковой для всех скоростей, но убывало бы при возрастании скорости от величины $m_1^0+m_2^0$ при $v=0$ до m_1^0 при

$v \to c$. Напротив, если вся масса электрона изменяется в зависимости от скорости по закону Лорентца—Эйнштейна (т. е. $m_2^0=0$), то произведение измеренной величины $m_\perp$ на $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ должно быть одинаковым для всех скоростей и равным массе покоящегося электрона.

Нейман, изучая отклонение электронов от прямолинейного пути в магнитном и электрическом полях, получил для произведения $m_\perp \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ значения, приведенные в следующей таблице:

$\frac{v}{c}$	0,39	0,49	0,60	0,71	0,85
$m_\perp \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot 10^{28}$	9,01	9,03	9,03	9,05	9,00

Эта таблица указывает, что произведение $m_\perp \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ остается одинаковым для всех скоростей движения. В последующие годы этот вывод был подтвержден многими экспериментами.

Из сказанного, казалось бы, можно заключить, что вся масса электрона имеет электромагнитное происхождение (является «полевой массой») и никакой другой массы электрон не имеет; это означало бы, что в приближенной формуле (36) $\mu=0$. Одно время и был сделан такой вывод. Однако этот вывод может оказаться неосновательным. Дело в том, что из весьма общего закона о зависимости между массой и энергией (который был упомянут в т. I на стр. 15 и подробно пояснен в т. III) можно вывести формулу Лорентца — Эйнштейна для зависимости массы от скорости [формулу (37)], причем обнаруживается, что *эта формула справедлива для всех частиц, как заряженных, так и не имеющих заряда* (нейтронов). Стало быть, возможно, что в приближенной формуле (36) $\mu \neq 0$, т. е. что некоторая часть массы электрона не связана непосредственно с электромагнитным полем электрона; по общему закону эта «неполевая» часть массы электрона должна изменяться в зависимости от скорости так же, как и «полевая» $\left(\mu = \frac{\mu_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$, и следовательно, при наличии у электрона «неполевой» массы произведение суммарной инертности электрона $m_\perp$ на $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ все равно должно оставаться постоянным при всех скоростях, как это и было установлено экспериментально.

Пользуясь законом пропорциональности массы и энергии, вычисление массы m_0 покоящегося электрона можно выполнить иначе, чем это было сделано выше. А именно, прежде всего нужно вычислить энергию электростатического поля покоящегося электрона. Если допустить, что заряд электрона равномерно распределен по сферической поверхности электрона, имеющей радиус a, то потенциал этого заряда будет $\frac{e}{a}$ и энергия (по формуле $W_e = \frac{1}{2}QV$) должна быть равна $\frac{1}{2}\frac{e^2}{a}$.

Тот же результат получается при интегрировании выражения для плотности электрической энергии по всему полю электрона:

$$W_e = \iiint\limits_{(a)}^{\infty} \frac{E^2}{8\pi}\, dv = \int\limits_{r=a}^{r=\infty} \frac{e^2}{8\pi r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2}\frac{e^2}{a}.$$

По закону пропорциональности массы и энергии масса электрона, выраженная в граммах, может быть получена, если его энергию, выраженную в эргах, разделить на квадрат скорости света, выраженной в *см/сек*, т. е. на $9\cdot 10^{20}$. Таким образом, *масса покоящегося электрона, обусловленная его электрическим полем*, должна быть равна

$$m_0 = \frac{1}{2}\frac{e^2}{ac^2}. \tag{39}$$

Это значение массы покоящегося электрона отличается от величины, приведенной в формуле (37) и подсчитанной по инертности, обусловленной возникновением магнитного поля при движении электрона, на величину $\frac{1}{6}\frac{e^2}{ac^2}$ что объясняется неточностью формулы (36). Однако возможно, что и выражение (39) в свою очередь не точно, так как кроме массы, связанной с материальной основой электрического поля, электрон, быть может, имеет еще некоторую *неполевую массу*, сопряженную с энергией каких-то еще не изученных сил, которые связуют воедино заряд электрона и являются причиной неделимости этого заряда.

При исследовании динамики электрона обычно применяют формулировку второго закона механики в виде уравнения $\boldsymbol{f} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}$. В этом случае отпадает необходимость в предварительном расчленении инертности электрона на поперечную и продольную инертность, а зависимость массы электрона от скорости полностью определяется законом Лорентца—Эйнштейна (37):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{40}$$

т. е. *масса движущегося электрона определяется его поперечной инертностью*: $m = m_\perp$.

Нетрудно понять, чем объясняется возможность такого упрощения. Если мы введем единичный вектор в направлении скорости $\mathfrak{v}$, то из уравнения

$$\boldsymbol{f} = \frac{d(m\mathfrak{v}v)}{dt}$$

получим:

$$\boldsymbol{f} = mv\frac{d\mathfrak{v}}{dt} + \mathfrak{v}\left(m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}\right) = mv\frac{d\mathfrak{v}}{dt} + \mathfrak{v}\left(m + v\frac{dm}{dv}\right)\frac{dv}{dt}.$$

Когда скорость не изменяется по величине, а изменяется только по направлению, то из приведенного уравнения следует $\left(\text{при } \frac{dv}{dt} = 0\right)$, что $\boldsymbol{f} = m\frac{v\,d\mathfrak{v}}{dt}$. Отсюда ясно, почему при использовании уравнения $\boldsymbol{f} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}$ за меру массы принимается поперечная инертность $m = m_\perp$. С другой стороны, когда скорость изменяется только по величине при неизменном направлении, т. е. когда $\frac{d\mathbf{v}}{dt}=0$, то имеем, что

$$m_{\parallel}=m+v\frac{dm}{dv}=m_0\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}}\right]=$$

$$=m_0\frac{1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}}=\frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}},$$

т. е. для продольной инертности получается уравнение Лорентца (38).