сит от емкости, самоиндукции, активного (омического) сопротивления цепи и от частоты питающего цепь генератора. Таким образом, возникает задача: по электрическим данным цепи и приложенной к ней переменной электродвижущей силе определить величину протекающего в цепи переменного тока.

Для простейшего случая цепи, состоящей только из активного (омического) сопротивления, вопрос решается простым применением закона Ома. Пусть к сопротивлению R приложена синусоидально изменяющаяся электродвижущая сила $\mathscr{E}$ с амплитудой $\mathscr{E}_0$. Тогда в любой момент согласно закону Ома

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\mathscr{E}_0}{R} \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Следовательно, $I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{R}$.

Можно перейти к эффективным значениям электродвижущей силы и величины тока, если обе части равенства разделить на $\sqrt{2}$.

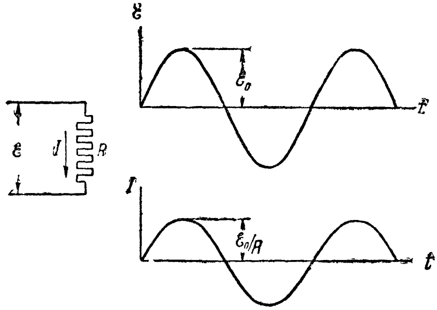

Рис. 335. Прохождение переменного тока через активное сопротивление.

Мы убеждаемся таким образом, что в случае активного сопротивления остается справедливым закон Ома: эффективное значение переменного тока, протекающего через сопротивление, равно эффективному значению приложенной электродвижущей силы, разделенному на величину сопротивления. При этом нужно отметить, что максимальное значение тока (амплитудное значение) наступает тогда, когда достигла амплитудного значения электродвижущая сила; кривая изменения тока в точности следует (рис. 335) за кривой изменения электродвижущей силы: *ток и напряжение на активном сопротивлении находятся в одной фазе.*

§ 80. Емкостное сопротивление и индуктивное сопротивление

Допустим, что переменная электродвижущая сила $\mathscr{E}$ с амплитудой $\mathscr{E}_0$ приложена к обкладкам конденсатора (рис.336). Электрическая цепь состоит в этом случае из одной емкости C. *Конденса-*

тор не представляет собой разрыва в цепи переменного тока, в диэлектрике конденсатора цепь замыкают т о к и с м е щ е н и я.

Если приложенная к конденсатору переменная электродвижущая сила синусоидальна,

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t,$$

то, поскольку заряд конденсатора Q в любой момент равен произведению емкости конденсатора C на разность потенциалов его обкладок ($V_2 - V_1 = \mathscr{E}$),

$$Q = C\mathscr{E} = C\mathscr{E}_0 \sin \omega t.$$

Пусть за бесконечно малый промежуток времени dt заряд изменяется на dQ. Ток в проводниках, подводящих заряды к конденсатору, будет равен

$$I_C = \frac{dQ}{dt} = C\mathscr{E}_0 \omega \cos \omega t,$$

или, что то же,

$$I_C = C\mathscr{E}\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Мы видим, что амплитуда тока в цепи конденсатора и амплитуда вызывающего этот ток напряжения, а следовательно, и их эффективные значения связаны соотношением

$$(I_C)_0 = \omega C\mathscr{E}_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\left(\frac{1}{\omega C}\right)}. \qquad (2)$$

Эта зависимость подобна закону Ома; роль сопротивления играет здесь величина

$$x_C = \frac{1}{\omega C};$$

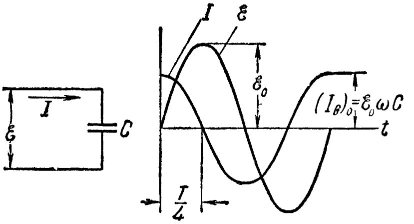

Рис. 336. Прохождение переменного тока через емкость.

эту величину называют *реактивным сопротивлением конденсатора*, или просто *емкостным сопротивлением*. Очевидно, что при увеличении ω, т. е. при увеличении частоты, емкостное сопротивление уменьшается.

При зарядке конденсатор потребляет энергию, при разряде он отдает ее обратно в цепь; в любой момент мощность равна

$$I_C\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t \cdot \mathscr{E}_0 \omega C \cos \omega t = \frac{\mathscr{E}_0^2}{2} \omega C \sin 2\omega t.$$

На рис. 337 дан график изменения энергии. Мы видим, что при росте абсолютной величины напряжения мощность положительна, генератор затрачивает ее на образование электрического поля; при уменьшении напряжения мощность отрицательна, конденсатор отдает энергию за счет распада электрического поля. Так как в течение одного периода конденсатор отдает обратно энергии столько, сколько он получил (если не учитывать рассеяние энергии при знакопеременной поляризации диэлектрика и утечку зарядов при плохой изоляции), то мощность, потребляемая конденсатором, в среднем равна нулю.

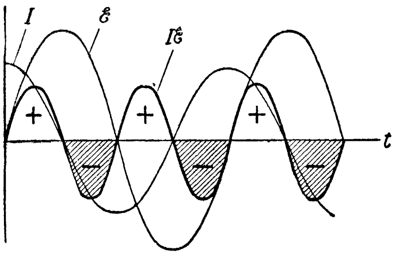

Рис. 337. Диаграмма мощности для чисто емкостной нагрузки.

Максимум тока не совпадает по времени с максимумом напряжения (см. рис. 336). К моменту, когда наступает максимум напряжения, зарядка конденсатора уже завершается; соответственно максимум тока наступает на четверть периода раньше, чем максимум напряжения: *ток, проходящий через емкость, на четверть периода опережает напряжение.*

Емкостное сопротивление 1 микрофарады при токе в 50 периодов в 1 сек. равно

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100\pi \cdot 10^{-6}} = 3200\ ом.$$

Емкостное сопротивление x_C

Емкость в		Сопротивление в омах (под жирной линией — в миллионах омов) при нижеприводимых частотах в герцах (*гц*) и килогерцах (*кгц*)					
мкф	*см*	50 *гц*	500 *гц*	2000 *гц*	10 000 *гц*	100 *кгц*	1000 *кгц*
500	—	6,4	0,64	0,16	0,032	—	—
10	—	320	32	8	1,6	0,16	0,016
6	—	530	53	13	2,6	0,26	0,026
4	—	800	80	20	4	0,4	0,04
2	—	1 600	160	40	8	0,8	0,08
1	—	3 200	320	80	16	1,6	0,16
0,1	90 000	0,032	3 200	800	160	16	1,6
—	50 000	0,057	5 700	1 400	290	29	2,9
—	10 000	0,29	0,029	7 000	1 400	140	14
—	5 000	0,57	0,057	0,014	2 900	290	29
—	1 000	2,9	0,29	0,07	0,014	1 400	140
—	500	5,7	0,57	0,14	0,029	2 900	290
—	100	29	2,9	0,7	0,14	0,014	1 400

Рассмотрим теперь случай, когда синусоидальная электродвижущая сила приложена к катушке (например, к катушке электромагнита), обладающей постоянной самоиндукцией L. Через катушку будет протекать синусоидальный ток

$$I_L = (I_L)_0 \sin \omega t.$$

При этом в катушке мы получим противоэлектродвижущую силу, пропорциональную скорости изменения тока и коэффициенту самоиндукции катушки:

$$\mathscr{E}_L = -L\frac{dI}{dt} = -LI_0\omega \cos \omega t.$$

Приложенная к катушке электродвижущая сила должна в любой момент уравновешивать противоэлектродвижущую силу катушки, т. е. она должна быть ей численно равна и противоположна по знаку:

$$\mathscr{E} = LI_0\omega \cos \omega t = \mathscr{E}_0 \cos \omega t.$$

Мы видим отсюда, что между амплитудой тока в катушке и амплитудой напряжения, вызывающего этот ток, существует следующее соотношение:

$$(I_L)_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{L\omega}. \tag{3}$$

Это соотношение справедливо, конечно, и для эффективных значений. Здесь роль сопротивления катушки переменному току играет величина $x_L = \omega L$.

Эту величину называют *реактивным сопротивлением катушки*, или просто *индуктивным сопротивлением*. Ток через катушку достигает максимума в момент, когда электродвижущая сила самоиндукции убывает до нуля; соответственно в этом случае ток уже не опережает напряжение, как для случая конденсатора, а, напротив, *ток на четверть периода отстает от приложенного напряжения* (рис. 338).

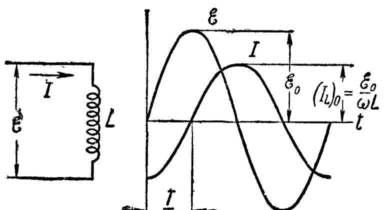

Рис. 338. Прохождение переменного тока через индуктивную катушку.

Средняя мощность, потребляемая катушкой (если не учитывать потерь, вызываемых сопротивлением провода катушки току — «плохим качеством» катушки), равна нулю: энергия, затрачиваемая при возрастании тока на образование магнитного поля катушки, вновь отдается в последующую четверть периода.

Индуктивное сопротивление 1 генри при токе в 50 периодов в 1 сек. равно $x_L = \omega L = 100\pi = 314$ *ом*.

Индуктивное сопротивление x_L

Индуктивность		Сопротивление в омах при нижеприводимых частотах в герцах (*гц*) и килогерцах (*кгц*)					
в *гн*	в *мкгн* (1000 *см*)	50 *гц*	500 *гц*	2000 *гц*	10 000 *гц*	100 *кгц*	1000 *кгц*
25	—	7850	78 500	314 000	—	—	—
10	—	3140	31 400	135 600	628 000	—	—
5	—	1570	15 700	62 800	314 000	—	—
1	—	314	3 140	13 560	62 800	628 000	—
0,1	—	31,4	314	1 356	6 280	62 800	628 000
0,01	—	3,14	31,4	135,6	628	6 280	62 800
0,001	1000	0,314	3,14	13,56	62,8	628	6 280
0,0001	100	0,0314	0,314	1,36	6,28	62,8	628

На стр. 394 были выведены формулы для нарастания тока в цепи, состоящей из катушки с индуктивностью L и активного сопротивления R, включенных последовательно, когда к такой цепи подведено напряжение $\mathcal{E}_0$,

$$I=\frac{\mathcal{E}_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{4}$$

и для убывания тока в указанной цепи при ее размыкании

$$I=I_0e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{5}$$

Если цепь состоит из конденсатора с емкостью C и последовательно включенного активного сопротивления R, то падение напряжения $\mathcal{E}_0$ в этой цепи слагается из падения напряжения на активном сопротивлении $\mathcal{E}'=RI$ и падения напряжения на конденсаторе $\mathcal{E}''=\frac{Q}{C}$ (где Q — заряд конденсатора в момент времени t, когда к конденсатору приложено напряжение $CQ=\mathcal{E}''$):

$$\mathcal{E}_0=RI+\frac{Q}{C}.$$

Следовательно, ток через конденсатор и сопротивление R в любой момент времени t определяется соотношением

$$I=\frac{\mathcal{E}_0}{R}-\frac{Q}{CR}=\frac{dQ}{dt}.$$

Отсюда

$$dt=\frac{dQ}{\frac{\mathcal{E}_0}{R}-\frac{Q}{CR}}=-CR\cdot d\ln\left(\mathcal{E}_0-\frac{Q}{CR}\right).$$

Интегрирование этого уравнения от $t=0$ до t и соответственно от $Q=0$ до Q приводит к формуле, определяющей нарастание со временем заряда конденсатора:

$$\ln \frac{\mathscr{E}_0 - \frac{Q}{CR}}{\mathscr{E}_0} = -\frac{t}{CR},$$

или

$$Q = \mathscr{E}_0 C \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right). \tag{6}$$

Так как $I = \frac{dQ}{dt}$, то согласно (6)

$$I = \frac{\mathscr{E}_0}{R} e^{-\frac{t}{CR}}. \tag{7}$$

Следовательно, в первый момент ток имеет такую величину $\left(\frac{\mathscr{E}_0}{R}\right)$, какую он имел бы, если бы не было «разрыва» цепи, созда-

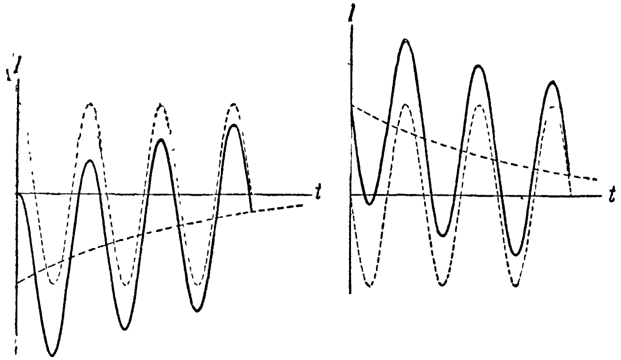

Рис. 339. Зависимость от времени тока при включении гармонической э. д. с. в цепь: катушки и сопротивления (слева) и конденсатора и сопротивления (справа).

ваемого конденсатором; через промежуток времени $\tau = CR$ ток уменьшается в 2,718 раза. Величину CR называют *постоянной времени* (она получается выраженной в секундах, если C измерено в фарадах и R в омах).

Аналогично для цепи, состоящей из катушки с индуктивностью L и последовательно включенного активного сопротивления R, согласно (5) постоянная времени равна отношению L/R.

Когда к цепи, состоящей из катушки с индуктивностью L (или же из конденсатора с емкостью C) и последовательно включенного активного сопротивления R, подведено переменное напряжение $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t$, изменение тока в цепи происходит так, что в каждый данный момент ток оказывается равным сумме: стационарного переменного тока через эту цепь и тока, возрастающего по формуле (4) [или же — для цепи с конденсатором — убывающего по формуле (7)]. Получающийся в итоге ток показан на рис. 339 сплошной линией.

Любая электропроводная цепь обладает индуктивностью, которая в главной своей части определяется магнитным полем между проводами, несущими прямой и обратный ток. Соответствующая этому зависимость индуктивности от формы и размеров цепи рассмотрена на стр. 398—401. Но, кроме того, каждый проводник обладает еще и некоторой *внутренней индуктивностью*, которая определяется внутренним магнитным полем в проводнике. При очень малой частоте переменного тока, когда плотность тока можно считать распределенной равномерно по поперечному сечению проводника, внутренняя индуктивность провода круглого сечения для каждого сантиметра его длины численно равна магнитной проницаемости вещества провода:

$$(L_{\text{внутр}})_0 = \mu_{\text{внутр}} \cdot l,$$

где l — длина провода в сантиметрах.

Вследствие внутренней индуктивности провод, кроме омического сопротивления, имеет также *внутреннее индуктивное сопротивление*. Однако при увеличении частоты тока внутреннее индуктивное сопротивление провода возрастает не пропорционально частоте тока, как, казалось бы, следует из выражения $x_L = \omega L$, но для больших частот приблизительно пропорционально корню квадратному из частоты. Это объясняется вытеснением тока при большой частоте на поверхность провода (т. е. скин-эффектом, стр. 389). Скин-эффект приводит к уменьшению магнитного поля в проводе и соответственно к уменьшению индуктивности $L_{\text{внутр}}$ провода. Если учесть это и, вычислив индуктивное сопротивление провода x_L, сопоставить его с активным сопротивлением R_0 того же провода постоянному току, то обнаруживается, что отношение $\frac{x_L}{R_0}$, близкое к нулю для малых частот тока, в области больших частот возрастает пропорционально частному от деления радиуса провода r на «глубину проникновения» ξ, что и соответствует пропорциональности корню из частоты (так как $\xi \approx \frac{\text{const}}{\sqrt{\nu}}$). Сравнивая рис. 340 с рис. 312 (на стр. 389), нетрудно увидеть, что при большой частоте тока внутреннее индуктивное сопротивление провода немногим меньше (примерно на $^1/_8\, R_0$), чем его увеличившееся вследствие скин-эффекта активное сопротивление R_ν току той же частоты ν.

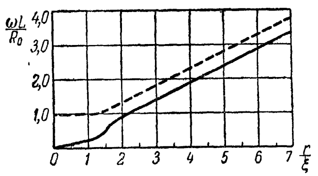

Рис. 340. Зависимость от частоты внутреннего индуктивного сопротивления круглого провода (по отношению к сопротивлению постоянному току), выраженная через отношение радиуса провода к «глубине проникновения». Пунктир воспроизводит рис. 312 на стр. 389).