§ 82. Обобщенный закон Ома

Мы разобрали три простейшие электрические цепи: цепь, содержащую только емкость, только индуктивность и только активное сопротивление. Однако реальная электрическая цепь всегда представляет собой более или менее сложную комбинацию этих простейших элементов.

Обратимся к случаю последовательного соединения емкости, индуктивности и активного сопротивления, к которым приложена синусоидальная электродвижущая сила $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t$ (рис. 344). Очевидно, что здесь через всю цепь протекает один и

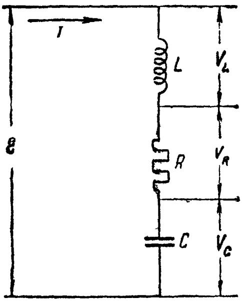

Рис. 344. Последовательное соединение элементов цепи.

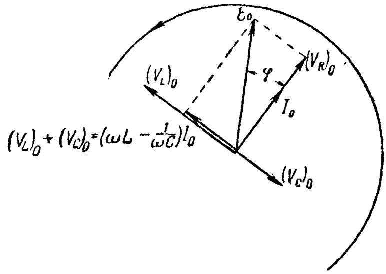

Рис. 345. Векторная диаграмма напряжений для последовательного соединения элементов цепи.

тот же ток $I_0 \sin \omega t$. Выберем его амплитуду в качестве основного вектора диаграммы.

Вектор напряжения на сопротивлении R совпадает по направлению с вектором тока, вектор напряжения на емкости C отстает от вектора тока на 90°, вектор напряжения на индуктивности L опережает вектор тока на 90° (рис. 345). Геометрическая сумма этих векторов изображает амплитуду внешней электродвижущей силы. Она равна по величине гипотенузе треугольника, построенного на $(V_R)_0$ и на геометрической сумме $(V_L)_0 + (V_C)_0$:

$$\mathscr{E}_0 = \sqrt{(V_R)^2 + [(V_L)_0 + (V_C)_0]^2} = \sqrt{(I_0 R)^2 + \left(I_0 \omega L - \frac{I_0}{\omega C}\right)^2} = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Мы получили соотношение между амплитудой тока и амплитудой напряжения для случая последовательно включенных емкости, индуктивности и сопротивления. Перепишем это соотношение в такой форме:

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (11)$$

Назвав

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = Z \tag{11'}$$

полным сопротивлением цепи, мы приходим к обобщенному закону Ома:

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{Z}.$$

Это соотношение справедливо, конечно, и для эффективных значений.

Легко видеть, что *амплитуда тока будет наибольшей тогда, когда противоположно направленные векторы напряжений* $(V_L)_0$ *и* $(V_C)_0$ *будут равны по величине.* При этом

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0$$

и величина тока

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{R},$$

т. е. в этом случае величина тока определяется только активным сопротивлением цепи.

Нетрудно определить угол φ (рис. 345) — разность фаз векторов тока и электродвижущей силы. Очевидно, тангенс этого угла равен отношению катетов треугольника, составленного векторами $(V_R)_0$ и $(V_L + V_C)_0$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \tag{12}$$

В зависимости от соотношения между $\frac{1}{\omega C}$ и ωL изменяются как величина, так и знак $\operatorname{tg}\varphi$. При преобладании емкостной составляющей вектор тока опережает суммарный вектор напряжения, при преобладании индуктивной составляющей — отстает от него. При $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ угол φ становится равным нулю и вектор тока совпадает с вектором напряжения.

Итак, когда к цепи (рис. 344) подведено напряжение

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t,$$

то это напряжение возбуждает ток

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi),$$

амплитуда и фаза которого определяются формулами (11) и (12).

Обозначим через x алгебраическую сумму индуктивного и емкостного сопротивлений цепи, считая, что одно из них, скажем емкостное сопротивление, должно быть взято в этой сумме с обратным знаком, так как на этих реактивных сопротивлениях создаются противоположные сдвиги фаз:

$$x = x_L - x_C.$$

При таком обозначении *суммарного реактивного сопротивления* полное сопротивление цепи из последовательно включенных в нее элементов согласно (11′) и (12) можно представить в следующем виде:

$$Z = R\sqrt{1+\left(\frac{x}{R}\right)^2} = R\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{R}{\cos\varphi}.$$

Стало быть, обобщенный закон Ома (11) можно записать так:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\cos\varphi. \qquad (13)$$

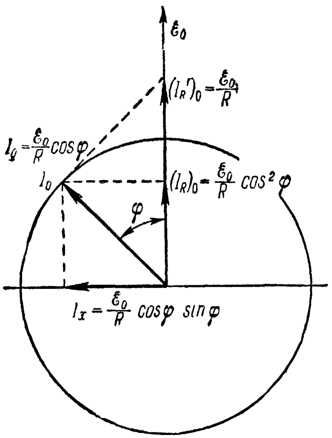

Рис. 346. При включении последовательно с R реактивного сопротивления x амплитуда тока уменьшается до величины $\frac{\mathcal{E}_0}{R}\cos\varphi$, а амплитуда активной составляющей тока — до величины $\frac{\mathcal{E}_0}{R}\cos^2\varphi$.

Если в выражении полного сопротивления цепи вынести за знак радикала не R, а x, то получается:

$$Z = x\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\varphi}+1} = \frac{x}{\sin\varphi}$$

и, следовательно,

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{x}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right). \qquad (13')$$

Мы видим, что если цепь вначале представляла собой чисто активное сопротивление R, то, когда при неизменном подведенном к цепи напряжении в нее вводится последовательно с R реактивное сопротивление x, вектор, изображающий амплитуду тока, становится равным проекции вектора-амплитуды существовавшего ранее в цепи активного тока на ось, составляющую угол φ с вектором напряжения (рис. 346). Проходящий теперь в цепи ток можно представить как сумму активного тока с амплитудой, уменьшившейся до значения $\frac{\mathcal{E}_0}{R}\cos^2\varphi$, и возникшего реактивного тока с амплитудой $\frac{\mathcal{E}_0}{R}\cos\varphi\sin\varphi$.

Аналогично: если цепь вначале представляла собой чисто реактивное сопротивление x, то включение последовательно с x активного сопротивления R уменьшает сдвиг фазы между током и напряжением на угол φ, вследствие чего амплитуда тока, которая раньше была равной $\frac{\mathcal{E}_0}{x}$, становится равной $\frac{\mathcal{E}_0}{x}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$, а амплитуда реактивной составляющей тока уменьшается до значения $\frac{\mathcal{E}_0}{x}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$; это показано на рис. 343, где угол $\frac{\pi}{2}-\varphi$ (угол потерь) обозначен через δ [1]).

§ 83. Электрический резонанс

Из формулы (11) следует, что величина переменного тока в цепи существенно зависит от его частоты. На рис. 347 показана зависимость [по формуле (11)] тока от частоты для случая сложной цепи, состоящей из п о с л е д о в а т е л ь н о соединенных емкости, самоиндукции и активного сопротивления при двух различных активных сопротивлениях цепи. По мере того как частота приближается к значению ω_0, при котором сопротивление цепи оказывается чисто активным и которое согласно (11′) и (12) определяется равенством

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C},$$

амплитуда тока возрастает до величины $(I_0)_{\text{макс}} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$; после этого значения амплитуда тока падает вновь. Эту частоту называют *собственной частотой электрической цепи*, или *резонансной частотой* [2]):

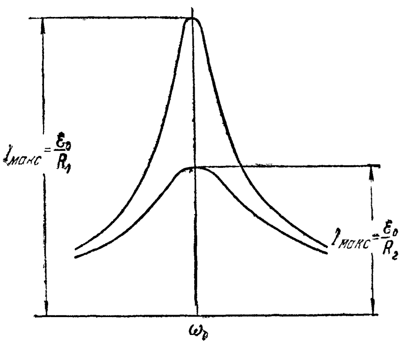

Рис. 347. Две резонансные кривые.

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \text{или} \quad \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{14}$$

---

[1]) Согласно (12) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{R}$. Следовательно, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \operatorname{tg}\delta = \operatorname{ctg}\varphi = \frac{R}{x}$, что обобщает формулы (9) и (9′).

[2]) Как пояснено далее, при той же частоте (определяемой условием $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$) для цепи, состоящей из тех же частей, но соединенных п а р а л л е л ь н о, *в проводах, подводящих напряжение*, наблюдается минимум тока.