Аналогично: если цепь вначале представляла собой чисто реактивное сопротивление x, то включение последовательно с x активного сопротивления R уменьшает сдвиг фазы между током и напряжением на угол φ, вследствие чего амплитуда тока, которая раньше была равной $\frac{\mathscr{E}_0}{x}$, становится равной $\frac{\mathscr{E}_0}{x}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$, а амплитуда реактивной составляющей тока уменьшается до значения $\frac{\mathscr{E}_0}{x}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$; это показано на рис. 343, где угол $\frac{\pi}{2}-\varphi$ (угол потерь) обозначен через δ [1]).

§ 83. Электрический резонанс

Из формулы (11) следует, что величина переменного тока в цепи существенно зависит от его частоты. На рис. 347 показана зависимость [по формуле (11)] тока от частоты для случая сложной цепи, состоящей из последовательно соединенных емкости, самоиндукции и активного сопротивления при двух различных активных сопротивлениях цепи. По мере того как частота приближается к значению ω_0, при котором сопротивление цепи оказывается чисто активным и которое согласно (11′) и (12) определяется равенством

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C},$$

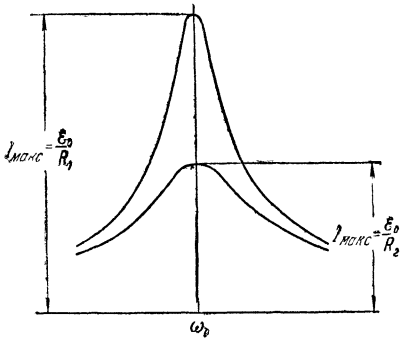

Рис. 347. Две резонансные кривые.

амплитуда тока возрастает до величины $(I_0)_{макс} = \frac{\mathscr{E}_0}{R}$; после этого значения амплитуда тока падает вновь. Эту частоту называют *собственной частотой электрической цепи*, или *резонансной частотой* [2]):

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \text{или} \quad \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{14}$$

---

[1]) Согласно (12) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{R}$. Следовательно, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \operatorname{tg}\delta = \operatorname{ctg}\varphi = \frac{R}{x}$, что обобщает формулы (9) и (9′).

[2]) Как пояснено далее, при той же частоте (определяемой условием $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$) для цепи, состоящей из тех же частей, но соединенных параллельно, *в проводах, подводящих напряжение*, наблюдается минимум тока.

Величина тока при резонансе получается, следовательно, тем большей, чем меньше омическое сопротивление цепи. При весьма малом омическом сопротивлении ток при резонансе соответственно обычному закону Ома велик и кривая резонанса имеет острый горб; чем больше омическое сопротивление цепи, тем меньше подъем тока при резонансе и тем менее резко выражен максимум на кривой резонанса.

Напряжения на конденсаторе ($-Ix_C$) и индуктивной катушке ($+Ix_l$) при резонансе могут быть очень велики; но (поскольку при резонансе $x_L=x_C$) они одинаковы по величине и, вместе с тем, противоположны по знаку; поэтому все подведенное напряжение $\mathcal{E}$ падает на активном сопротивлении R:

$$(V_L)_{0\,\text{рез}} = I_0\omega_0 L, \quad (V_C)_{0\,\text{рез}} = I_0\frac{1}{\omega_0 C} \qquad (V_L = -V_C).$$

Заменяя в этих формулах собственную частоту цепи ω_0 через $\frac{1}{\sqrt{LC}}$, их часто записывают так:

$$(V_L)_{0\,\text{рез}} = (V_C)_{0\,\text{рез}} = I_0\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}\,.$$

По сопоставлении с законом Ома очевидно, что величина $\sqrt{\frac{L}{C}}$ имеет физический смысл сопротивления цепи при резонансе. Эту величину называют *волновым сопротивлением* цепи (как пояснено подробнее на стр. 502, указанная величина определяет отношение напряжения к току в электромагнитной волне, распространяющейся вдоль проводящей линии).

Мы видим, таким образом, что при резонансе в последовательной цепи амплитуды напряжения на катушке и конденсаторе равны напряжению, которое резонансный ток амплитудной величины создает на волновом сопротивлении:

$$(V_L)_{0\,\text{рез}} = (V_C)_{0\,\text{рез}} = I_0\cdot R_{\text{волн}}, \quad \text{где} \quad R_{\text{волн}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\,. \tag{15}$$

Полезно отметить, что, вообще говоря, при какой-либо частоте, отличной от резонансной, волновое сопротивление цепи представляет собой величину среднегармоническую по отношению к индуктивному и емкостному сопротивлениям цепи. Действительно,

$$R_{\text{волн}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\omega L}{\omega C}}\,.$$

Следовательно,

$$R_{\text{волн}} = \sqrt{x_l x_C}.$$

При резонансной частоте $x_l = x_C$ и

$$(R_{\text{волн}} = x_L = x_C)_{\omega=\omega_0}. \tag{16}$$

Заметим, что если L выражено не в генри, а в микрогенри или же в сантиметрах, а C не в фарадах, а в пикофарадах или тоже в сантиметрах, то

$$R_{\substack{\text{волн} \\ \text{(в омах)}}} = \sqrt{\frac{L_{\text{(в генри)}}}{C_{\text{(в фарадах)}}}} = 30\sqrt{\frac{L_{\text{(в см)}}}{C_{\text{(в см)}}}} = 1000\sqrt{\frac{L_{\text{(в мкгн)}}}{C_{\text{(в пф)}}}}.$$

По формуле (15) в цепи, которая состоит из последовательно включенных омического сопротивления $R=10$ *ом* и реактивных сопротивлений $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = 1000$ *ом*, электродвижущая сила, имеющая амплитуду 100 *в*, дает при резонансе амплитуду тока в 10 *а* (при частоте, в четыре раза большей или меньшей, чем резонансная, ток в указанной цепи не превышает 2 *а*); напряжения на конденсаторе и катушке при резонансе будут иметь амплитуду $10 \cdot 1000 = 10\,000$ *в*.

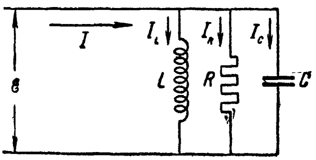

Рис. 348. Параллельное соединение элементов цепи.

Мы видим, таким образом, что цепь, *состоящая из последовательно соединенных индуктивности, емкости и сопротивления, представляет для проходящего через нее переменного тока тем меньшее сопротивление, чем ближе частота тока к резонансной частоте цепи*; при резонансе напряжения на конденсаторе и катушке, равные друг другу, но противоположные по направлению, могут во много раз превышать электродвижущую силу, действующую на цепь в целом.

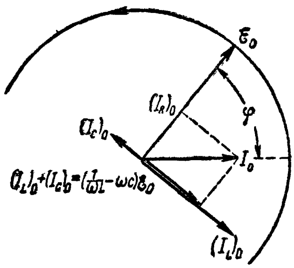

Рис. 349. Векторная диаграмма токов для параллельного соединения элементов цепи

Обратимся к рис. 348, на котором схематически изображена цепь, состоящая из параллельно соединенных индуктивности L, емкости C и активного сопротивления R, к которым приложена синусоидальная электродвижущая сила.

Понятно, что общий ток в такой цепи является суммой трех токов: активного и двух реактивных. Построим систему векторов для этих трех токов (рис. 349). Векторы индуктивного и емкостного токов направлены противоположно друг другу (так как первый на 90° отстает от вектора напряжения, а второй на 90° опережает напряжение); вектор же активного тока расположен к ним под прямым углом. Чтобы найти правило сложения амплитуд тока, вспомним, что нам нужно найти вектор, проекция которого равнялась бы сумме проекций отдельных составляющих векторов; очевидно, что в качестве вектора суммарного тока мы должны взять равнодействующую (геометрическую сумму) активного, индуктивного и емкостного токов.

На рис. 349 произведено сложение трех векторов тока для электрической сети, которая схематически представлена на рис. 348. Мы видим, что угол между вектором суммарного тока и вектором напряжения (угол φ) определяется соотношением между активной составляющей тока и алгебраической суммой реактивных составляющих. Вектор тока может как опережать, так и отставать от вектора напряжения в зависимости от того, что больше: индуктивное сопротивление или же емкостное сопротивление.

Наиболее выгодный случай получается тогда, когда оба реактивных тока, противоположных один другому, уравновесят друг друга. Тогда источник электроэнергии, генератор, будет загружен только полезным активным током.

Векторы емкостного и индуктивного токов компенсируют друг друга, когда

$$\frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C.$$

Мы получаем в этом случае явление резонанса при частоте, которая определяется той же формулой (14) (если участки цепи, содержащие L и C, не обладают заметным активным сопротивлением).

Однако в этом случае суммарный ток I *во внешней цепи* при резонансе имеет уже не наибольшее, а наименьшее значение, так как реактивные токи, компенсируя друг друга в цепи емкости и индуктивности, во внешней цепи отсутствуют.

Аналогично выводу формулы (11) по диаграмме рис. 345 и учитывая, что для параллельной цепи $I_0^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2$, из диаграммы рис. 349 получаем: $I_0^2 = \frac{\mathscr{E}_0^2}{R^2} + \mathscr{E}_0^2 \left(\frac{1}{x_L} - \frac{1}{x_C}\right)^2$. Отсюда *полная проводимость* параллельной цепи определяется формулой

$$\frac{1}{Z_{\parallel}} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{x_L} - \frac{1}{x_C}\right)^2}. \tag{17}$$

При резонансе $x_L = x_C$ и полное сопротивление цепи равно активному сопротивлению ($Z_{\parallel} = R$), которое шунтирует катушку и конденсатор. При частоте, отличной от резонансной, когда $x_L \neq x_C$, полная проводимость становится больше, т. е. уменьшается сопротивление цепи; тогда через внешнюю цепь протекает не только активный ток, но и часть реактивного тока, циркулирующего в контуре катушка — конденсатор.

Таким образом, *контур, состоящий из параллельно подключенных индуктивности и емкости, представляет собой тем больше сопротивление для подведенного к этому контуру переменного тока, чем ближе частота тока к резонансной частоте контура.*

Реактивные токи (рис. 350) образуют в цепи кольцевой переменный ток, который при резонансной частоте минует внешнюю цепь; этот реактивный ток может быть очень велик, в то время как ток во внешней цепи определяется в момент резонанса только сопротивлением R и может быть относительно небольшим.

Амплитуда реактивного тока в цепи параллельно включенных катушки и конденсатора при резонансе равна частному от деления амплитуды подведенного к ним напряжения на реактивное сопротивление катушки или конденсатора или, что для резонансной частоты согласно (16) то же самое, на волновое сопротивление контура:

$$(I_L)_{0\,\text{рез}} = (I_C)_{0\,\text{рез}} = \frac{\mathscr{E}_0}{R_{\text{волн}}} \qquad (I_L = -I_C). \tag{18}$$

Поскольку при собственной частоте ω_0 в цепи, состоящей из последовательно включенных сопротивления, катушки и конденсатора, напряжения на клеммах катушки и конденсатора могут во много раз превышать подведенное напряжение, этот случай часто (но не вполне удачно) называют *резонансом напряжений*; по аналогичной причине резонанс в цепи, состоящей из тех же элементов, соединенных параллельно, называют *резонансом токов*. [Правильнее относить понятие резонанса к совокупности явлений, происходящих в цепи; кроме того, как раз в последовательной цепи ток при резонансе максимален [1]). Наиболее характерно, что при резонансе сопротивление становится чисто активным и что в зависимости от частоты тока сопротивление последовательной цепи при резонансе имеет более или менее остро выраженный минимум, а параллельной цепи — максимум.]

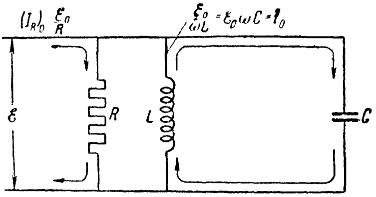

Рис. 350. Резонанс в параллельной цепи.

Прохождение переменного тока через катушку и конденсатор всегда сопряжено с некоторыми потерями мощности (стр. 449). В совокупности эти потери равносильны активным сопротивлениям (r_L и r_C), включенным последовательно с катушкой и конденсатором, которые тогда можно считать идеальными, т. е. не имеющими потерь и обладающими только чисто реактивными сопротивлениями ωL и $\frac{1}{\omega C}$. В связи со сказанным ясно, что когда катушка и конденсатор включены в цепь последовательно без допол-

[1]) Максимумы амплитуд напряжения на конденсаторе и катушке наблюдаются, как пояснено в конце данного параграфа, при частотах, несколько отличных от ω_0.

нительного активного сопротивления R (рис. 344), то в такой последовательной цепи все же нельзя считать R равным нулю, но нужно принять R равным сопротивлению суммарных потерь в катушке и конденсаторе: $R = r_{\text{пот}} = r_L + r_C$. В этом случае сопротивление цепи при резонансе согласно (11′)

$$R_{\substack{\text{рез}\\ \text{последов. цепи}}} = r_{\text{пот}},$$

т. е. при малых потерях оно мало.

Для цепи, состоящей из параллельно включенных катушки и конденсатора (рис. 350), без дополнительного шунтирующего сопротивления (т. е. когда $R = \infty$), дело обстоит несколько сложнее.

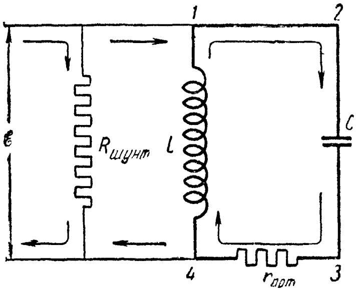

Рис. 351. Резонанс в параллельной цепи.

Казалось бы, что если нет шунтирующего сопротивления, то согласно (17) проводимость параллельной цепи при резонансе равна нулю, т. е. резонансное сопротивление контура бесконечно велико. Однако и в этом случае, когда никакого дополнительного шунтирующего сопротивления к катушке и конденсатору не подключено, все же нельзя считать $R = \infty$, потому что, как мы сейчас убедимся, наличие $r_{\text{пот}}$ в цепи катушки и конденсатора (рис. 351) равносильно существованию некоторого шунтирующего сопротивления $R_{\text{шунт}}$. По формуле (17) это эквивалентное шунтирующее сопротивление и является в данном случае резонансным сопротивлением цепи.

При резонансе в контуре (1 — 2 — 3 — 4) циркулирует реактивный ток с амплитудой $(I_{\text{реакт}})_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\omega_0 L}\left(= \frac{\mathscr{E}_0}{\frac{1}{\omega_0 C}}\right)$. В связи с этим на каком-либо сопротивлении r, включенном в указанный контур (в частности, на сопротивлении $r_{\text{пот}}$), рассеивается мощность

$$\Delta W_1 = \frac{r\,(I_{\text{реакт}})_0^2}{2} = \frac{r}{2}\,\frac{\mathscr{E}_0^2}{(\omega_0 L)^2}.$$

Через сопротивление $R_{\text{шунт}}$ проходит ток с амплитудой $(I_{\text{акт}})_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{R_{\text{шунт}}}$ и, следовательно, рассеивается мощность

$$\Delta W_2 = \frac{R_{\text{шунт}}\,(I_{\text{акт}})_0^2}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathscr{E}_0^2}{R_{\text{шунт}}}.$$

Эти рассеиваемые мощности равны и, стало быть, замена сопротивления r сопротивлением $R_{\text{шунт}}$ (или же обратная замена $R_{\text{шунт}}$ на r)

допустима, когда

$$\frac{r}{(\omega_0 L)^2} = \frac{1}{R_{\text{шунт}}},$$

т. е. когда

$$R_{\text{шунт}} = \frac{(\omega_0 L)^2}{r} = \frac{1}{r}\frac{L}{C},$$

или, что то же, когда

$$rR_{\text{шунт}} = R^2_{\text{волн}}. \tag{19}$$

Мы видим, таким образом, что катушку и конденсатор можно считать идеальными (не создающими потерь мощности тока), если представить себе, что при воображаемой замене реальной катушки и конденсатора идеальными параллельно им подключено шунтирующее сопротивление, определяемое формулой (19). При резонансе сопротивление контура (*1 — 2 — 3 — 4*), если катушка и конденсатор не создают потерь, бесконечно велико, и поэтому резонансное сопротивление реальной цепи, не имеющей дополнительного шунта сверх создаваемого фактическими потерями в катушке и конденсаторе по формулам (17) и (19),

$$\underset{\text{паралл. цепи}}{R_{\text{рез}}} = \frac{R^2_{\text{волн}}}{r_{\text{пот}}}. \tag{20}$$

Эта формула показывает, что *резонансное сопротивление контура из параллельно включенных катушки и конденсатора тем более велико, чем меньше сопротивление потерь* катушки и конденсатора и чем больше волновое сопротивление цепи, т. е. *чем больше отношение индуктивности контура к емкости*. Реально в радиотехнических устройствах $R_{\text{рез}}$ для частот порядка 10^5 *гц*, т. е. для длинных радиоволн (когда L значительно), может иметь величину порядка сотен тысяч омов, а для более высоких частот (когда L невелико) — десятков тысяч омов.

Если контур из параллельно включенных катушки и конденсатора дополнительно шунтирован сопротивлением $R_{\text{доп. шунт}}$, то понятно, что это соответственно уменьшает резонансное сопротивление контура, которое тогда вычисляется по обычному правилу сложения проводимостей для параллельно включенных сопротивлений:

$$\frac{1}{R_{\text{рез}}} = \frac{1}{\underset{\text{без шунта}}{R_{\text{рез}}}} + \frac{1}{R_{\text{доп. шунт}}}.$$

Действие сопротивления, дополнительно шунтирующего контур, равносильно тому, что в контур (*1 — 2 — 3 — 4*) *вносится дополнительное активное сопротивление*, равное по формуле (19)

$$r_{\text{внос}} = \frac{R^2_{\text{волн}}}{R_{\text{доп. шунт}}}.$$

Поэтому предыдущее уравнение можно переписать так:

$$\frac{1}{R_{\text{рез}}} = \frac{r_{\text{пот}}}{R^2_{\text{волн}}} + \frac{r_{\text{внос}}}{R^2_{\text{волн}}}.$$

Стало быть, введя *полное активное сопротивление контура, равное сумме сопротивления потерь и сопротивления, вносимого шунтом*, можно, как это обычно и делают, вычислять резонансное сопротивление шунтированной цепи по формуле, аналогичной формуле (20):

$$R_{\substack{\text{рез}\\ \text{паралл. цепи}}} = \frac{R^2_{\text{волн}}}{r_{\text{полн. акт}}}, \tag{21}$$

где

$$r_{\text{полн. акт}} = r_{\text{пот}} + r_{\text{внос}}. \tag{21$'$}$$

Поясненная выше формула (19) для пересчета шунтирующего сопротивления в сопротивление, включенное последовательно, широко применяется в радиотехнических расчетах; получаемые такой заменой R на r (или обратной заменой) схемы электрических цепей называют *эквивалентными схемами*.

Для характеристики резонансных свойств цепи, состоящей из катушки и конденсатора (а также и отдельно ее элементов), вместо сопротивления потерь часто пользуются представлением о *добротности* Q цепи (или отдельно ее элементов):

$$Q = \frac{\text{запас энергии в цепи}}{\text{потеря энергии за время } \frac{1}{\omega_0} \text{ сек.}}.$$

Запас энергии в катушке равен половине произведения индуктивности на квадрат амплитуды реактивного тока, а потеря энергии в катушке за 1 сек. равна половине произведения сопротивления потерь в катушке тоже на квадрат амплитуды реактивного тока. Поэтому добротность катушки получается равной отношению $\omega_0 L$ (т. е. реактивного сопротивления) к сопротивлению потерь в катушке. В случае конденсатора запас энергии в цепи равен $\frac{1}{2}C(V_C)_0^2 = \frac{1}{2}Cx_C^2(I_C)_0^2$ и поэтому также $Q = \frac{x_C}{r}$. Аналогичное выражение получается и для цепи катушка — конденсатор (в соответствии со сказанным на стр. 449):

$$Q = \frac{\text{реактивное сопротивление}}{\text{сопротивление потерь}}.$$

Согласно формуле (16) при резонансе $R_{\text{реакт}} = R_{\text{волн}}$, а сопротивление потерь возрастает на величину потерь, вносимых шунтом (если он имеется) и, следовательно, добротность контура из катушки и конденсатора [1])

$$Q = \frac{R_{\text{волн}}}{r_{\text{полн. акт}}}. \tag{22}$$

Совмещая (21) и (22), получаем удобную для запоминания формулу резонансного сопротивления:

$$R_{\substack{\text{рез} \\ \text{паралл. цепи}}} = Q \cdot R_{\text{волн}}. \tag{23}$$

Индуктивные катушки, применяемые в высокочастотных контурах радиотехнической аппаратуры, обычно имеют добротность, равную для длинных волн 40—60, для коротких 150—200. Добротность слюдяных конденсаторов высока (при емкости более 50 *см* — порядка 1000, при малых емкостях 300—500). Добротность электролитических конденсаторов весьма мала (для низких частот 5—10). Волновое сопротивление резонансных контуров, рассчитанных на усиление средних радиочастот (300—600 *кгц*, т. е. волн длиной 1000—500 *м*), обычно составляет около 1000 *ом*, для более длинных волн 2000—3000 *ом*, а для высоких частот (3—6 *Мгц*, т. е. волн длиной 100—50 *м*) приблизительно 500—600 *ом*; удовлетворительной добротностью контура считают $Q \approx 100$.

Итак, контур, состоящий из параллельно подключенных емкости и индуктивности, оказывает переменному току резонансной частоты тем большее сопротивление, чем меньше активное сопротивление контура [формула (21)], или, что то же, чем больше добротность контура [формула (23)]. На этом основано применение

---

[1]) Приведенное в тексте определение добротности можно сформулировать и так: добротность представляет собой величину, обратную той доле запасенной энергии, которая рассеивается за время $\frac{1}{\omega_0}$ сек. Мерой рассеяния энергии при колебательных движениях служит коэффициент затухания α (т. I, § 60, стр. 234). Запасенная в электрической цепи энергия W пропорциональна квадрату амплитуды тока или напряжения; считая рассеяние энергии при установившемся резонансном состоянии в цепи таким же, какое наблюдается при затухании свободных колебаний в этой цепи (т. е. принимая, что без притока энергии величина W уменьшилась бы пропорционально $e^{-2\alpha t}$), находим, что за время $\Delta t = \frac{1}{\omega_0}$ рассеивается доля запасенной энергии, равная $-\frac{\Delta W}{W} = 2\alpha \frac{1}{\omega_0}$. Стало быть,

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}.$$

Сравнивая это выражение с формулой (22), мы видим, что коэффициент затухания электрической цепи связан с полным сопротивлением потерь соотношением

$$\alpha = \omega_0 \frac{r_{\text{полн. акт}}}{2R_{\text{волн}}} = \frac{r_{\text{полн. акт}}}{2L}.$$

резонансных контуров для *фильтрации токов*; если к схеме, изображенной на рис. 351, одновременно подведены токи различных частот, то (при большом сопротивлении шунта R) все токи, имеющие частоту, отличную от резонансной, пойдут через контур (*1 — 2 — 3 — 4*), представляющий для них малое сопротивление; напротив, ток, имеющий резонансную частоту, вследствие большого $R_{рез}$ пойдет преимущественно через шунт и, таким образом, он окажется выделенным, отфильтрованным от токов всех остальных частот.

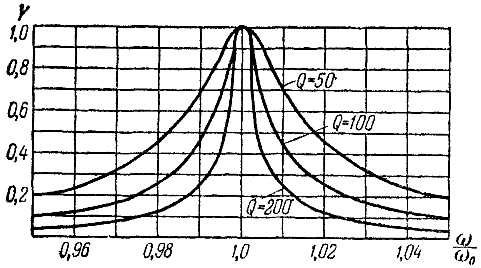

Рис. 352. Резонансные кривые при разных значениях добротности. Для параллельного соединения конденсатора и катушки $Y=\frac{Z_{\parallel}}{R_{рез}}$, где $Z_{\parallel}$ — сопротивление контура при частоте ω; для последовательного соединения $Y=\frac{I_0}{(I_{рез})_0}$.

Резонансные кривые, определяющие зависимость сопротивления контура *1—2—3—4* переменному току, при разных добротностях имеют такой же вид, как и резонансные кривые тока в последовательной цепи емкости и индуктивности при разных активных сопротивлениях цепи. На рис. 352 эти кривые построены для относительных значений ординат [1]). Здесь ясно видно, что чем больше

---

[1]) Подставляя в (11) значения $\sqrt{L}$ и $\sqrt{C}$, выраженные согласно (14) через собственную частоту цепи $\left(\sqrt{L}=\frac{1}{\omega_0\sqrt{C}}\right)$, что приводит к преобразованию

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}=\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\sqrt{\frac{L}{C}},$$

и вводя $Q=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}$ (в данном случае $r=R$), вместо (11) получаем:

$$I_0=\frac{(I_{рез})_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2Q^2}} \qquad (*)$$

Для параллельной цепи без дополнительного шунта величину R в формуле (17) надо, как было указано выше, считать равной пересчитанному на параллельное включение активному сопротивлению контура, т. е. согласно (19) заменить $\frac{1}{R^2}$ через $r^2\left(\frac{C}{L}\right)^2$. В данном случае под знаком радикала мы имеем выдобротность, тем уже резонансная кривая (тем больше *избирательность* контура). Если на оси абсцисс откладывать не величину $\frac{\omega}{\omega_0}$, где ω_0 — резонансная частота, а произведение величины $\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}$ на

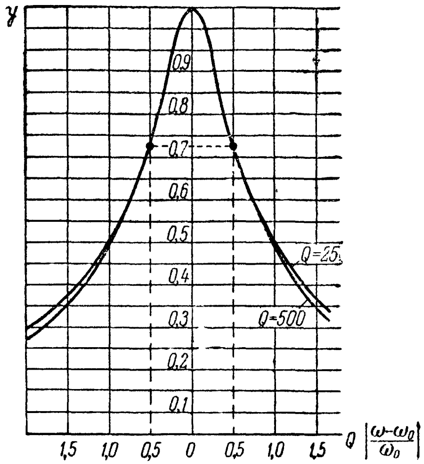

Рис 353. Обобщенная резонансная кривая. Пунктиром показана «полоса пропускания».

добротность, то все кривые для значений добротности от 25 до 500 почти совпадают[1]) (рис. 353).

ражение:

$$r^2\left(\frac{C}{L}\right)^2+\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\frac{C}{L}=r^2\left(\frac{C}{L}\right)^2\left[1+\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\frac{1}{r^2}\frac{L}{C}\right].$$

В итоге получается соотношение (*), но не для амплитуд токов (и пропорциональных им при заданном напряжении проводимостей), а для отношения сопротивлений $\frac{Z_{||}}{R_{\text{рез}}}$, где $R_{\text{рез}}=\frac{1}{r}\left(\frac{L}{C}\right)$.

[1]) Для частот, относительно близких к резонансной частоте, можно в точной формуле резонансных кривых (*) приближенно принять $\frac{\omega+\omega_0}{\omega}\approx 2$. Тогда

$$\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega_0\omega}=\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}\,\frac{\omega+\omega_0}{\omega}=2\,\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}.$$

Стало быть, если ввести обозначение

$$a=\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}Q,$$

то для цепей всех значений добротности получается следующее уравнение обобщенной резонансной кривой:

$$y=\left[\frac{I_0}{(I_{\text{рез}})_0}\right]_{\substack{\text{паралл.}\\ \text{цепи}}}=\left[\frac{Z_{||}}{R_{\text{рез}}}\right]_{\substack{\text{посл.}\\ \text{цепи}}}=\frac{1}{\sqrt{1+4a^2}}.$$

Для характеристики избирательности контура условно принято называть полосой пропускания, или *шириной резонансной кривой*, тот интервал частот $\omega'' - \omega'$ вблизи резонансной частоты, на границах которого амплитуды тока или напряжения уменьшаются до $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\approx 0{,}7$) их резонансного значения, что соответствует уменьшению мощности в два раза. Из рис. 353 видно, что для указанного интервала частот

$$\frac{\omega'' - \omega'}{\omega_0} Q = 1, \tag{24}$$

т. е. обратная величина добротности как раз указывает относительную полосу пропускания (этим обычно и пользуются для измерения добротности).

В теории колебаний, когда эту теорию развивают на основе анализа колебательных движений в механических системах (т. I, глава X), под резонансной частотой понимают ту частоту, при которой амплитуда смещений достигает максимума; с собственной частотой ω_0 резонансная частота связана соотношением [т. I, стр. 239, формула (24')]

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}, \tag{a}$$

где α — коэффициент затухания.

В связи с этим может возникнуть недоумение: почему даже при наличии значительного затухания резонанс в электрической цепи определяется совпадением частоты подведенного напряжения с собственной частотой цепи $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, а не соответственно формуле (а), причем надо отметить, что для последовательной цепи формула

$$\omega_{\substack{рез \\ последов.\ цепи}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

является точной независимо от величины потерь, тогда как для резонанса в параллельной цепи она, как показано ниже, нуждается в уточнении.

Дело в том, что если руководствоваться аналогией между колебаниями тока и механическими колебаниями, то в дифференциальных уравнениях колебаний соответствие между механическими системами и электрическими цепями обнаруживается, когда величина смещения уподоблена напряжению на конденсаторе. При частоте ω_0 сопротивление последовательной цепи становится чисто активным и амплитуда тока достигает максимума, но это не означает, как иногда думают, что и амплитуды напряжения на конденсаторе или катушке тоже максимальны. В полном согласии с формулой (а) и величиной коэффициента затухания, указанной в примечании на стр. 461, амплитуда напряжения на конденсаторе в последовательной цепи становится максимальной не при частоте ω, а при частоте [1])

$$\omega_{макс\,(V_C)_0} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{2L^2}}.$$

[1]) Амплитуда напряжения на конденсаторе в последовательной цепи $(V_C)_0 = I_0 \cdot x_C$, где $x_C = \frac{1}{\omega C}$ и $I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{Z}$. Следовательно, $(V_C)_0$ достигает максимума, когда минимально произведение ωZ, т. е. когда минимально выра-

Амплитуда напряжения на катушке достигает максимума, напротив, при частоте большей, чем собственная частота цепи, причем

$$\omega_{\text{макс}\,(V_C)_0} \cdot \omega_{\text{макс}\,(V_L)_0} = \omega_0^2.$$

Для технических применений важны, однако, не эти (тоже резонансные) явления, а резонансный минимум (для последовательной цепи) и максимум (для параллельной цепи) сопротивления, которое оказывает цепь подведенному к ней переменному току; при этом особенно существенно, что при резонансе сопротивление цепи становится чисто активным.

В случае параллельной цепи, чтобы ее сопротивление было чисто активным, должны взаимно компенсироваться реактивные составляющие токов через катушку и конденсатор. При неодинаковых потерях в катушке и конденсаторе компенсация реактивных токов происходит при частоте, немного отличающейся от ω_0. Действительно, согласно сказанному в конце предыдущего параграфа и по рис. 343 амплитуда реактивного тока через катушку равна $\frac{\mathscr{E}_0}{\omega L}\cos^2\delta_L$, а через конденсатор — равна $\mathscr{E}_0\omega C\cos^2\delta_C$, где δ_L и δ_C — углы потерь. Стало быть,

$$\omega_{\substack{\text{рез}\\ \text{паралл. цепи}}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,\frac{\cos\delta_L}{\cos\delta_C}.$$

Обычно потери в конденсаторе весьма малы ($\cos\delta_L \approx 1$); тогда, если принять во внимание, что $\operatorname{tg}\delta_L = \frac{1}{Q_L}$ и, следовательно,

$$\cos\delta_L = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta_L}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{Q^2}}},$$

получится:

$$\omega_{\substack{\text{рез}\\ \text{паралл. цепи}}} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{Q_L^2}}}.$$

Эта формула показывает, что даже при небольшой добротности катушки, порядка $Q=35$, частота резонанса в параллельной цепи меньше собственной частоты цепи всего на пять сотых долей процента.

При возбуждении резонансных колебаний тока в электрической цепи в ней наряду с вынужденными колебаниями возникают свободные колебания, происходящие с частотой

$$\omega_{\text{своб}} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}, \tag{b}$$

жение, получающееся для указанного произведения под знаком радикала:

$$R\omega^2 + \left(\omega^2 L - \frac{1}{C}\right)^2.$$

Приравнивая нулю производную по ω от этого выражения и разделив все члены на $2\omega_m L^2$, находим:

$$\frac{R^2}{2L^2} + \omega_m^2 - \frac{1}{LC} = 0,$$

что и дает формулу, приведенную в тексте.

где α—коэффициент затухания, который для электрической цепи (как было показано в примечании на стр. 461) равен $\frac{r}{2L}$, или, что то же, $\frac{\omega_0}{2Q}$. Таким образом,

$$\omega_{своб} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}. \qquad (c)$$

Чем больше величина потерь и меньше индуктивность цепи, тем быстрее затухают свободные колебания тока в цепи, уступая место стационарному режиму вынужденных резонансных колебаний.

Из сказанного и формулы (24) ясно, что при слишком большой величине добротности резонансный контур может оказаться для некоторых применений непригодным, так как чрезмерно сужается ширина резонансной кривой и возрастает время установления резонансного режима [1]).

§ 84. Трансформация тока

Главное техническое преимущество переменного тока в сравнении с постоянным заключается в том, что величину и напряжение переменного тока можно в широчайших пределах преобразовывать (*трансформировать*) без существенных потерь мощности. Для снижения бесполезного нагревания проводов по линиям электропередачи подают ток пониженной величины и повышенного до сотен тысяч вольт напряжения, а в местах потребления в тысячи раз снижают напряжение с соответственным повышением величины тока; этим достигается уменьшение потерь в линиях передачи в миллионы раз, так как выделение тепла пропорционально квадрату величины тока. Кроме того, дополнительная трансформация тока в разнообразных приборах, использующих ток, всегда позволяет иметь ток наиболее удобного напряжения и нужной величины.

Трансформатор (рис. 354) в основном состоит из двух катушек, намотанных на общий железный сердечник. Одна из этих катушек, называемая обычно п е р в и ч н о й, приключается к линии, питаемой генератором переменного тока. Устройство, потребляющее электроэнергию, будь то электромоторы, лампы накаливания и т. д., подключается ко в т о р и ч н о й обмотке трансформатора.

---

[1]) Нередко декремент затухания вычисляют по величине добротности цепи, пользуясь формулой

$$\vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}}.$$

Эта формула, которая на первый взгляд может показаться несколько неожиданной (так как коэффициент затухания связан с добротностью весьма простым соотношением $\alpha = \frac{\omega_0}{2Q}$), является следствием формулы (c) для частоты свободных колебаний, которая входит в определение декремента затухания:

$$\vartheta = \alpha T = \alpha \frac{2\pi}{\omega_{своб}} = \frac{\pi}{Q} \frac{\omega_0}{\omega_{своб}} = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}}.$$